Sujet Projet MIGS M2

Optimisation convexe en imagerie

Encadrant	Samuel Vaiter
Adresse e-mail	`samuel.vaiter@u-bourgogne.fr`

Contexte

Ce projet concerne la résolution de problèmes inverses linéaires dans le contexte du traitement du signal ou d'image. Un tel problème peut être écrit sous la forme

$$y = \Phi x_0 + w,$$

où $y \in \mathbb{R}^q$ représente les observations, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ les données inconnues à retrouver, Φ un opérateur linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$ et w un terme de bruit additif. Ce modèle inclut de nombreux cas typiques en imagerie tels que le débruitage, la déconvolution, l'interpolation, l'échantillonnage compressé ainsi que la tomographie. L'opérateur linéaire Φ est généralement mal conditionné et/ou non inversible, ce qui rend *mal posé* le problème de retrouver x_0 à partir de y. C'est la raison pour laquelle il s'avère nécessaire de mettre en place une stratégie de reconstruction. Un cadre classique est celui des méthodes variationnelles, pouvant s'écrire sous la forme

$$x^\star \in \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{Argmin}} \; \frac{1}{2}\|y - \Phi x\|_2^2 + \lambda \mathcal{J}(x), \tag{$\mathcal{P}_{y,\lambda}$}$$

où $\mathcal{J}$ est une fonctionnelle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ que l'on considérera convexe mais qui sera typiquement non différentiable. Il s'agit de réaliser un compromis entre fidélité aux données (terme quadratique ici) et régularisation, représentée ici par $\mathcal{J}$. Ce compromis est dicté par le choix du paramètre λ. Le choix de $\mathcal{J}$ est un sujet de recherche en soit. Selon le modèle de signal que l'on pose, on utilise par exemple les normes $\|\cdot\|_1$ [3], $\|\cdot\|_\infty$ [2] ou encore des semi-normes comme la variation totale $\|\nabla \cdot\|_1$ [5].

Objectif du projet

L'objectif principal du projet sera d'initier l'étudiant à l'optimisation convexe non-lisse d'un point de vue théorique, algorithmique et applicatif. Le stage commencera par une mise à niveau éventuelle sur les concepts de base de l'analyse convexe [4] tel que la convexité, la notion de sous-différentielle ainsi que la dualité de Fenchel-Rockafellar. Il s'agira ensuite de voir comment ces concepts donnent naissance à des algorithmes [1] permettant la résolution d'un problème tel que $(\mathcal{P}_{y,\lambda})$, généralisant ainsi la méthode de descente de gradient classique pour des fonctions différentiables. Enfin, l'accent sera mis sur l'implémentation de ces méthodes sur des problèmes choisis en imagerie, par exemple à travers la réalisation d'une mini librairie de méthodes proximales. Le langage de programmation sera libre, avec une préférence pour Python, Julia ou Matlab.

Bibliographie

[1] P. L. Combettes and J.-C. Pesquet. "Proximal splitting methods in signal processing". In: *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering.* Ed. by H. H. Bauschke, Burachik R. S., P. L. Combettes, Elser. V., D. R. Luke, and H. Wolkowicz. Springer, 2011, pp. 185–212.

[2] H. Jégou, T. Furon, and J.-J. Fuchs. "Anti-sparse coding for approximate nearest neighbor search". In: *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2012 IEEE International Conference on.* IEEE. 2012, pp. 2029–2032.

[3] S. G. Mallat. *A wavelet tour of signal processing.* Third. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2009.

[4] R.T. Rockafellar. *Convex analysis.* Vol. 28. Princeton University Press, 1996.

[5] L.I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. "Nonlinear total variation based noise removal algorithms". In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 60.1 (1992), pp. 259–268.