



THÉORÈME DE PÓLYA

FEYEUX Eva - LABROSSE Lisa

Master de Mathématiques
Année Universitaire 2022-2023

TABLE DES MATIÈRES

Préambule	2
1 Preuve : version dénombrement	3
1.1 Rappels	3
1.2 Première propriété des marches récurrentes	5
1.3 Récurrence et divergence	6
1.4 Résultats	7
1.4.1 Cas des dimensions 1 et 2	7
1.4.2 Cas de la dimension 3	11
1.4.3 Cas d'une dimension quelconque	15
2 Preuve : version analytique	16
2.1 Les fonctions caractéristiques	16
2.2 Conclusion	21
Conclusion	22
Pour aller plus loin	23
Implémentation sur Python	25
Bibliographie	33

PRÉAMBULE

Une personne ivre sur Terre finira toujours par rentrer chez elle. Il n'en est pas de même dans l'espace, où ce pauvre oiseau se déplaçant de manière erratique serait condamné à un vol sans fin vers l'infini.

À travers ce mémoire, nous allons étudier les marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d avec $d \in \mathbb{N}^*$, partant de l'origine, où à chaque pas, le marcheur choisit aléatoirement et uniformément son chemin. Nous verrons que selon la dimension d choisie, le marcheur va revenir à l'origine presque sûrement, ou, au contraire, ne reviendra jamais à l'origine.

L'important, ce n'est pas la destination, mais le voyage en lui-même.

ROBERT LOUIS STEVENSON

C'est avec cette mentalité que nous avons choisi d'étudier le théorème de Pólya, dans l'objectif de comprendre son fonctionnement. Pour ce faire, nous nous focaliserons sur une vision combinatoire de sa preuve, puis nous nous intéresserons à une version analytique de celle-ci. Diverses simulations vont illustrer ces résultats.

Nous espérons que le voyage vous plaira et nous vous souhaitons une agréable lecture.

Théorème 0.1 : Théorème de Pólya.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires modélisant une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d et vérifiant :

$$X_0 = 0 \text{ et} \tag{1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k \tag{2}$$

où $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $\{-e_1, e_1, \dots, -e_d, e_d\}$, avec e_1, \dots, e_d les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^d .

Alors, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente si et seulement si $d < 3$.

Notation 0.1.

Dorénavant, lorsque des variables aléatoires seront "indépendantes et identiquement distribuées", celles-ci seront notées *i.i.d.*

CHAPITRE 1

PREUVE : VERSION DÉNOMBREMENT

1.1 Rappels

Nous allons commencer par définir des notions importantes pour la suite.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans (E, \mathcal{E}) .

Définition 1.1.1.

On appelle chaîne de Markov une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possédant la propriété suivante : l'information utile pour prédire l'avenir est entièrement contenue dans le présent et ne dépend plus de ce qui a pu se passer précédemment. Cela revient à dire que :

$$\forall n \geq 0, \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = i_n), \quad (1.1)$$

avec $k, i_0, \dots, i_n \in E$.

Définition 1.1.2.

Une chaîne de Markov est homogène si pour tout $i, j \in E$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$. Cette probabilité est alors notée $p_{i,j}$.

La matrice $(p_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ est appelée matrice de transition de la chaîne de Markov.

Définition 1.1.3.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov.

On dit que i et j communiquent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(X_n = i | X_0 = j) > 0$ et s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(X_m = j | X_0 = i) > 0$. On note $i \leftrightarrow j$.

La relation "communiquer" définit une relation d'équivalence.

Définition 1.1.4.

Une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite irréductible si tous ses états communiquent.

Définition 1.1.5.

Posons $\sigma_0 = \inf\{n > 0 : X_n = 0\}$ le premier retour en 0. Alors,
 La chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente en 0 si $\mathbb{P}_0(\sigma_0 < +\infty) = 1$.
 La chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est transiente en 0 si $\mathbb{P}_0(\sigma_0 < +\infty) < 1$.

On définit N_0 le nombre de retour en 0 de X_n , alors $N_0 = \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\{X_k=0\}}$.

Proposition 1.1.1.

Une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente (en 0) si, presque sûrement, elle passe un nombre infini de fois en 0. Ainsi, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente si et seulement si $\mathbb{P}(N_0 = \infty) = 1$.
 Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passe seulement un nombre fini de fois par 0, c'est-à-dire $\mathbb{P}(N_0 = \infty) = 0$ presque sûrement, alors la chaîne de Markov est transiente.

Pour la suite, nous allons introduire le résultat suivant, qui sera admis.

On définit $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-tribus de \mathcal{A} telle que $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{A}_n = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

Lemme 1.1.1 : Propriété de Markov forte.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov et T un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Considérons Φ une variable aléatoire positive ou bornée. Alors,

$$\mathbb{E}[\Phi \circ \theta_T | \mathcal{A}_T] \mathbb{1}_{\{T < +\infty\}} = \mathbb{E}_{X_T}[\Phi] \mathbb{1}_{\{T < +\infty\}} \quad p.s.$$

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 1.1.1.

Démonstration. On définit, par récurrence, la suite de temps d'arrêt $(\sigma^{(n)})_{n \geq 1}$ comme suit :

$$\sigma^{(1)} := \sigma_0; \quad \sigma^{(n+1)} := \inf\{k > \sigma^{(n)}; X_k = 0\}. \quad (1.1)$$

Alors $\{\sigma^{(n)}; n \geq 1\}$ est l'ensemble des temps de passages successifs en 0.

Plus précisément, on a

$$\{\sigma^{(n)}; \sigma^{(n)} < +\infty \text{ et } n \geq 1\} = \{n \geq 1; X_n = 0\}. \quad (1.2)$$

On note θ l'opérateur de translation tel que $\sigma^{(n)} \circ \theta = \sigma^{(n+1)}$ et $\theta_{\sigma^{(n)}} = \theta^{\sigma^{(n)}}$.

La suite $(\sigma^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} + \inf\{k > 0; X_{k+\sigma^{(n)}} = 0\} = \sigma^{(n)} + \sigma^{(1)} \circ_{\sigma^{(n)}} \text{ sur } \{\sigma^{(n)} < \infty\}. \quad (1.3)$$

On définit $a_n := \mathbb{P}_0(\sigma^{(n)} < +\infty)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \mathbb{P}_0(\sigma^{(n+1)} < +\infty) \\ &= \mathbb{P}_0(\sigma^{(n+1)} < +\infty, \sigma^{(n)} < +\infty) \\ &= \mathbb{P}_0(\sigma^{(n)} < +\infty, \sigma_0 \circ \theta_{\sigma^{(n)}} < +\infty) \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)} < +\infty\}} \mathbb{1}_{\{\sigma_0 < +\infty\}} \circ \theta_{\sigma^{(n)}}]. \end{aligned}$$

L'évènement $\{\sigma^{(n)} < +\infty\}$ appartient à $\mathcal{A}_{\sigma^{(n)}}$, donc

$$a_{n+1} = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)} < +\infty\}} \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)} < +\infty\}} \mathbb{1}_{\{\sigma_0 < +\infty\}} \circ \theta_{\sigma^{(n)}} | \mathcal{A}_{\sigma^{(n)}}]]. \quad (1.4)$$

En utilisant la propriété de Markov forte, on a alors que l'équation (1.4) est égale à :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)} < +\infty\}} \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)} < +\infty\}} \mathbb{1}_{\{\sigma_0 < +\infty\}} \circ \theta_{\sigma^{(n)}} | \mathcal{A}_{\sigma^{(n)}}]] \\
 &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)} < +\infty\}} \mathbb{E}_{X_{\sigma^{(n)}}}[\mathbb{1}_{\{\sigma_0 < +\infty\}}]] \\
 &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{\sigma^{(n)} < +\infty\}} \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{\sigma_0 < +\infty\}}]] \\
 &= \mathbb{P}_0(\sigma^{(n)} < +\infty) \mathbb{P}_0(\sigma_0 < +\infty) \\
 &= a_n a_1.
 \end{aligned}$$

La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $a_1 \in [0, 1]$.

On remarque que $\{\sigma^{(n+1)} < +\infty\} \subset \{\sigma^{(n)} < +\infty\}$. C'est une suite décroissante d'évènements, on a donc

$$\mathbb{P}_0\left(\bigcap_{n \geq 1} \{\sigma^{(n)} < +\infty\}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_0(\{\sigma^{(n)} < +\infty\}).$$

D'après la relation (1.2) on a : $\bigcap_{n \geq 1} \{\sigma^{(n)} < +\infty\} = \{N_0 = \infty\}$. On peut alors en déduire que

$$\mathbb{P}_0(N_0 = +\infty) = 0 \text{ si } a_1 < 1 \text{ et } \mathbb{P}_0(N_0 = +\infty) = 1 \text{ si } a_1 = 1.$$

□

Définition 1.1.6.

Les marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d sont des chaînes de Markov homogènes irréductibles.

Exemple 1. Plaçons nous dans le cas $d=1$.

La marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{Z} est une chaîne de Markov. Ainsi, celle-ci admet une matrice de transition. À chaque nouvelle étape, l'ivrogne peut avancer ou reculer d'un pas, c'est-à-dire que si au temps n il est au point k , alors au temps $n+1$, il sera en position $k-1$ ou $k+1$ chacune avec probabilité $\frac{1}{2}$. Cela peut se traduire par la matrice de transition Q suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \begin{cases} Q(x, x+1) = \frac{1}{2}. \\ Q(x, x-1) = \frac{1}{2}. \\ Q(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{sinon.}$$

1.2 Première propriété des marches récurrentes

Afin de pouvoir démontrer le théoème de Pólya, nous allons commencer par montrer un premier résultat.

Théorème 1.1.

Si la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d est récurrente en 0, alors la marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d l'est aussi, pour tout $d' \leq d$.

Démonstration. Notons R l'évènement "La marche aléatoire revient en 0 en un temps fini". R est donc défini comme suit

$$R := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X_n = 0\}.$$

On remarque également que $R = \{\sigma_0 < \infty\}$.

Par définition, la chaîne de Markov irréductible $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est transiente lorsque $\mathbb{P}(R) < 1$, récurrente sinon.

Soit $d' \in \llbracket 0, d \rrbracket$. Notons κ la projection de \mathbb{R}^d sur $\mathbb{R}^{d'}$ telle que $(x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1, \dots, x_{d'})$ et notons la suite de temps aléatoires $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} \tau_0 = 0. \\ \forall n \in \mathbb{N}, \tau_{n+1} = \inf\{k > \tau_n \mid \kappa(X_k) \neq \kappa(X_{\tau_n})\}. \end{cases}$$

La suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des rangs auxquels l'une des d' premières coordonnées du vecteur aléatoire X_k change. On pose alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, X'_n := X_{\tau(n)}.$$

Ainsi la suite $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est obtenue en tronquant les $d - d'$ dernières coordonnées des termes de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en supprimant les termes successifs qui se répètent.

Pour la suite, on admettra le lemme suivant.

Lemme 1.2.1.

La suite $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ modélise la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^{d'}$.

Remarque : Le lemme 1.2.1 peut être démontré en utilisant notamment la propriété de Markov forte.

Or, on a

$$R' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (X'_n = 0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (X_{\tau(n)} = 0) \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (X_n = 0) = R.$$

En effet, si $X_n = 0$, comme $(\tau_n)_n$ est une suite croissante qui tend vers l'infini, il existe k tel que $\tau_k \leq n \leq \tau_{k+1}$ et $X_{\tau_k} = 0$, c'est-à-dire $X'_k = 0$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{X_n = 0\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{X_{\tau_n} = 0\}.$$

De plus, comme une mesure de probabilité est croissante, on déduit de $R \subset R'$, que $\mathbb{P}(R') \geq \mathbb{P}(R)$. Donc $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente en 0 (sur $\mathbb{Z}^{d'}$) dès que $\mathbb{P}(R) = 1$, c'est-à-dire dès que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente en 0 (sur \mathbb{Z}^d). La chaîne est irréductible, ainsi si elle est récurrente en un point alors elle est récurrente en tout point. On a donc que $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente. \square

1.3 Récurrence et divergence

Le résultat important de cette partie est le suivant.

Théorème 1.2.

$(X_n)_{n \geq 0}$ est récurrente \iff La série de terme général $\mathbb{P}(X_n = 0)$ diverge.

Démonstration. On rappelle que le nombre de retour en 0 est défini par

$$N_0 := \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=0\}}.$$

Dans un premier temps, montrons que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est transiente alors N_0 suit une loi géométrique $\mathcal{G}(1 - \mathbb{P}(\sigma_0 < \infty)) = \mathcal{G}(1 - \mathbb{P}(R))$.

En effet, soit $k \geq 2$. On rappelle que la suite des temps de passages successifs en 0 $(\sigma^n)_{n \geq 1}$ est défini comme suit :

$$\sigma^1 = \sigma_0; \sigma^{n+1} = \inf\{j > \sigma^n; X_j = 0\}.$$

On a alors $\{N_0 \geq k\} = \{\sigma^{k-1} < \infty\}$ presque sûrement.

On rappelle que $(\mathbb{P}_0(\sigma^n < \infty))_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\mathbb{P}_0(\sigma_0 < \infty)$. Donc $\mathbb{P}_0(N_0 \geq k) = \mathbb{P}_0(\sigma^{k-1} < \infty) = \mathbb{P}_0(\sigma_0 < \infty)^{k-1}$.

Ainsi, comme la fonction de répartition caractérise la loi, on a que N_0 suit une loi géométrique $\mathcal{G}(1 - \mathbb{P}(\sigma_0 < \infty))$. Sinon, N_0 vaut presque sûrement $+\infty$.

Ainsi, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est transiente si et seulement si N_0 admet une espérance finie.

En utilisant les propriétés classiques de l'espérance et grâce au théorème de Fubini-Tonelli, on montre facilement le résultat souhaité. En effet, on a

$$\mathbb{E}(N_0) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=0\}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_k=0\}}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_k = 0).$$

□

1.4 Résultats

Pour la suite, nous rappelons que la probabilité de chaque déplacement est équiprobable. De ce fait, il nous reste à prouver, dans cette partie, que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente dans les cas de la dimension $d = 1, 2$ et transiente dans le cas $d \geq 3$.

1.4.1 Cas des dimensions 1 et 2

Supposons tout d'abord que $d = 2$ ce qui nous permettra alors de conclure pour $d = 1$ par le théorème 1.1.

Montrons que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X_n = 0)$ diverge, afin de conclure d'après le théorème 1.2 que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente.

On remarque tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 0$ si n est impair. En effet, en partant de 0, pour revenir en 0, il faut faire autant de pas à gauche qu'à droite, autant de pas en haut qu'en bas. Cela revient à dire qu'il nécessite un nombre pair d'étapes. Dès lors, nous pouvons nous restreindre au cas $n = 2p$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Or, la marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ retourne à l'origine en $2p$ étapes si et seulement si elle effectue dans le plan lors de ces n étapes des mouvements qui se compensent, c'est-à-dire, k mouvements vers la droite, k mouvements vers la gauche, $p - k$ mouvements vers le haut et $p - k$ mouvements vers le bas pour un certain entier $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$. On a donc

$$\mathbb{P}(X_{2p} = 0) = \sum_{k=0}^p \binom{2p}{k} \binom{2p-k}{k} \binom{2p-2k}{p-k} \frac{1}{4^{2p}}.$$

En effet, on choisit d'abord k déplacements à gauche parmi les $2p$ déplacements effectués. Comme précédemment, on doit également faire k déplacements à droite parmi ceux qui restent à faire, soit $2p - k$ pas. Ensuite, on choisit nos $p - k$ déplacements en haut parmi les $2p - 2k$ restants. Il ne reste désormais plus de choix pour les derniers déplacement vers le bas. Les déplacements sont uniformes, alors on multiplie le tout par la probabilité d'un déplacement à la puissance du nombre total de pas effectués, soit $\frac{1}{4}$ à la puissance $2p$, d'où le résultat.

Après une réécriture de notre résultat, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{2p} = 0) &= \sum_{k=0}^p \frac{(2p)!}{4^{2p} k! k! (p-k)! (p-k)!} \\ &= \frac{1}{4^{2p}} \sum_{k=0}^p \frac{(2p)! p! p!}{p! p! k! k! (p-k)! (p-k)!} \\ &= \binom{2p}{p} \frac{1}{4^{2p}} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \binom{p}{p-k}.\end{aligned}$$

Pour continuer, nous devons au préalable introduire la formule suivante :

Théorème 1.3 : Formule de Vandermonde.

Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \llbracket 0, m+n \rrbracket$, on a :

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}.$$

Démonstration. Démontrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$\mathcal{P}_n : " \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \llbracket 0, m+1 \rrbracket, \binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} "$$

Initialisation :

On rappelle que pour $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.

Pour $n = 0$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{0}{p-k} &= \binom{m}{p} \binom{0}{0} \\ &= \binom{m+0}{p}.\end{aligned}$$

Donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité :

Supposons que \mathcal{P}_n soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Regardons si $p = 0$:

$$\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n+1}{p-k} = \binom{m}{0} \binom{n+1}{0} = 1 = \binom{m+n+1}{0}.$$

Et si $p \neq 0$, d'après la relation de Pascal, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n+1}{p-k} &= \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \left[\binom{n}{p-k} + \binom{n}{p-k-1} \right] \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} + \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k-1}.\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence sur (n, m, p) et $(n, m, p - 1)$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n+1}{p-k} &= \binom{m+n}{p} + \binom{m+n}{p-1} \\ &= \binom{m+n+1}{p}. \end{aligned}$$

Donc, \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

On déduit du théorème 1.3 que $\mathbb{P}(X_{2p} = 0) = \binom{2p}{p} \frac{1}{4^{2p}}$.

Par la formule de Stirling, $p! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi p} e^{-p} p^p$, on a ainsi

$$\mathbb{P}(X_{2p} = 0) = \frac{((2p)!)^2}{4^{2p}(p!)^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\sqrt{4p\pi}(2p)^{2p}e^{-2p})^2}{4^{2p}(\sqrt{2p\pi}p^pe^{-p})^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{4p}}{4^{2p}\pi p} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi p}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{\pi p}$ diverge par le critère de Riemann.

Ainsi, on obtient la divergence de la série des $\mathbb{P}(X_n = 0)$.

Donc nous avons bien montré la récurrence de la marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en dimension 2.

Ce résultat étant vrai pour la dimension 2, le théorème 1.1 nous affirme qu'il l'est aussi pour la dimension 1.

Illustration 1. Ci-dessous se trouve une réalisation d'une marche aléatoire dans \mathbb{Z} pour 1000 pas avec $p = \frac{1}{2}$ où p représente la probabilité d'aller à gauche ou à droite. On observe donc de très nombreux retours en 0.



FIGURE 1.1 – Marche aléatoire dans \mathbb{Z}

Illustration 2. Nous avons tracé l'histogramme de la fréquence du nombre de pas par chemin grâce à 2000 expériences. Au vu de l'expérience précédente, nous nous sommes restreintes à maximum 1000 pas par chemin car très rares sont les marches qui dépassent pour $d = 1$. On peut constater dans ce cas que la plupart des réalisations reviennent rapidement en 0 : les chemins sont courts. Dans un souci de lisibilité, nous ne représentons ici que l'histogramme pour les chemins de moins de 40 pas.

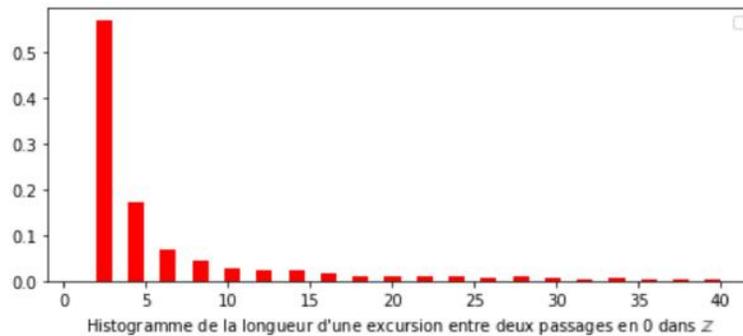


FIGURE 1.2 – Histogramme de marches aléatoires dans \mathbb{Z} de 1000 pas

Illustration 3. Voici une réalisation d'un chemin aléatoire emprunté par un ivrogne dans le cas $d=2$. En dimension 2, retourner à l'origine est un événement qui se réalise presque sûrement.

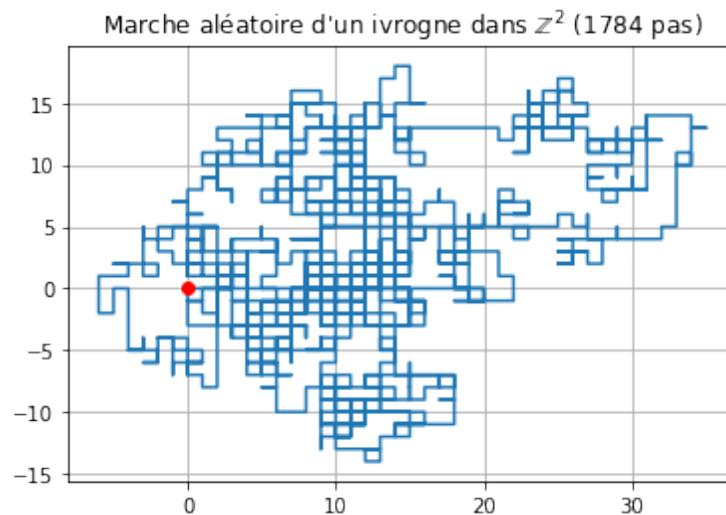


FIGURE 1.3 – Marche aléatoire dans \mathbb{Z}^2

Illustration 4. Voici l'histogramme du nombre de pas par chemin avec 1000 réalisations. Pour cela, nous sommes restreints à au plus 100000 pas par chemin car les marches ne dépassent que rarement ce nombre de pas pour $d = 2$. On peut constater dans ce cas que la plupart des réalisations reviennent rapidement en 0. Il y a cependant plus de chemins qui reviennent en 0 assez tardivement : on remarque que l'on revient moins vite en 0 dans \mathbb{Z}^2 que dans \mathbb{Z} de manière générale. Dans un souci de lisibilité, ne se trouve que l'histogramme pour les chemins de moins de 30000 pas.

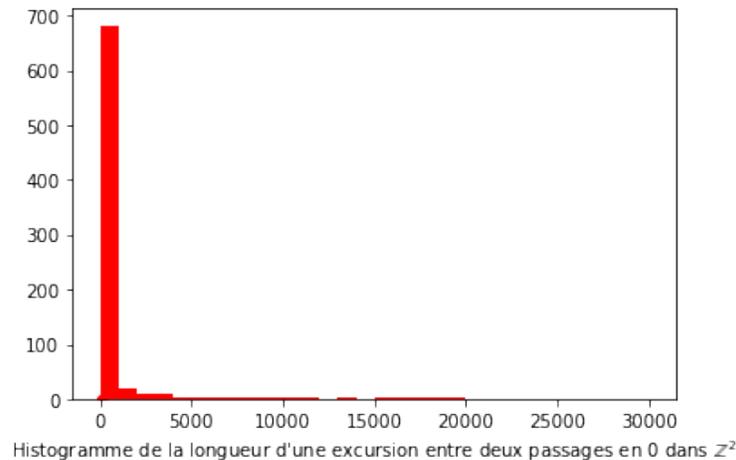


FIGURE 1.4 – Histogramme de la longueur d'un chemin dans \mathbb{Z}^2

1.4.2 Cas de la dimension 3

Supposons, à présent, que $d = 3$.

Comme précédemment, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ impair, on a $\mathbb{P}(X_n = 0) = 0$. On appelle chemin fermé un chemin qui part de 0 et qui revient à 0 en un nombre fini de pas. On supposera, ici, que toutes les trajectoires de longueur $2p$ sont équiprobables puisque les pas sont tous i.i.d. Dans ce cas, la probabilité d'un évènement est alors égale au nombre de fois qu'il se produit sur le nombre total de possibilités. Ainsi, le nombre de chemins fermés de longueur $2p$ est $6^{2p}\mathbb{P}(X_{2p} = 0)$. C'est une fonction croissante de $p \in \mathbb{N}$ puisqu'il est possible de créer un chemin fermé de longueur $2(p+1)$ à partir d'un chemin fermé de longueur $2p$, en lui ajoutant deux mouvements qui se compensent. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{6p-4} = 0) \leq \mathbb{P}(X_{6p} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{6p-2} = 0) \leq 6\mathbb{P}(X_{6p} = 0). \end{cases}$$

Il suffit donc d'établir la convergence de la série de terme général $\mathbb{P}(X_{6p} = 0)$ pour conclure que la série de terme général $\mathbb{P}(X_n = 0)$ converge et en déduire, grâce au théorème 1.2, que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est transiente.

Fixons $p \in \mathbb{N}$.

En considérant le nombre de mouvements vers le haut, vers le bas, vers la gauche, vers la droite, vers l'avant et vers l'arrière, de façon similaire au cas $d = 2$. Par calcul direct, on aura

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{6p} = 0) &= \sum_{\substack{i, j \in [0, n] \\ i+j+k=3p}} \binom{6p}{i} \binom{6p-i}{i} \binom{6p-2i}{j} \binom{6p-2i-j}{j} \binom{2k}{k} \frac{1}{6^{6p}} \\ &= \frac{1}{6^{6p}} \sum_{\substack{i, j \in [0, n] \\ i+j+k=3p}} \frac{(6p)!}{(i!j!k!)^2}. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.1.

Pour tout $i, j, k \in [0, p]^3$ tels que $i + j + k = 3p$, on a alors $i!j!k! \geq (p!)^3$.

Démonstration. Soit $E = \{(i, j, k) \in [0, p]^3 \mid i + j + k = 3p\}$. Cherchons le minimum de la quantité $i!j!k!$ pour $(i, j, k) \in E$.

Soit $(i, j, k) \in E$ minimisant $i!j!k!$.

Supposons $i < k - 1$, on a $i < 3p$ et $k > 1$ donc $(k - 1, j, i + 1) \in E$. Or

$$\frac{(i + 1)!j!(k - 1)!}{i!j!k!} = \frac{i + 1}{k} < 1,$$

ce qui contredit l'hypothèse $i < k - 1$.

Supposons désormais que $i \geq k - 1$, et par symétrie $k \geq i - 1$, d'où $|k - i| \leq 1$.

De même, on a $|k - j| \leq 1$ et $|j - i| \leq 1$.

Comme $i, j, k \in \mathbb{N}$, on en déduit que deux d'entre eux sont égaux, prenons $i = j$.

Si, par ailleurs, on a $k = i \pm 1$, alors $3p = i + j + k = 3i \pm 1 \equiv \pm 1 \pmod{3}$.

C'est impossible, on en déduit alors que $k = i$.

Ainsi, on a $i = j = k = p$ car $i + j + k = 3p$, d'où le résultat souhaité. □

De ceci, il vient alors que

$$\mathbb{P}(X_{6p} = 0) \leq \frac{(6p)!}{6^{6p}(3p)!(p!)^3} \sum_{i, j, k \in [0, 3p], i+j+k=3p} \frac{(3p)!}{i!j!k!}.$$

Et par la formule du binôme, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i, j, k \in [0, 3p], i+j+k=3p} \frac{(3p)!}{i!j!k!} &= \sum_{i=0}^{3p} \sum_{j=0}^{3p-i} \frac{(3p)!}{i!j!(3p-i-j)!} \\ &= \sum_{i=0}^{3p} \frac{(3p)!}{i!(3p-i)!} \sum_{j=0}^{3p-i} \binom{3p-i}{j} \\ &= \sum_{i=0}^{3p} \binom{3p}{i} 2^{3p-i} \\ &= 3^{3p}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathbb{P}(X_{6p} = 0) \leq \frac{(6p)!3^{3p}}{6^{6p}(3p)!(p!)^3}.$$

Et maintenant, en appliquant de nouveau la formule de Stirling, on trouve

$$\mathbb{P}(X_{6p} = 0) \leq \frac{(6p)!3^{3p}}{6^{6p}(3p)!(p!)^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{4\pi^3 p^3}}.$$

Nous sommes maintenant en présence d'un terme général de série convergente. Ainsi, par comparaison, la série de terme général $\mathbb{P}(X_{6p} = 0)$ est convergente.

Donc $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est transiente.

Illustration 1. Cette fois, contrairement aux cas $d = 1$ et $d = 2$, l'expérience montre bien qu'on ne retrouve pas toujours l'origine même en prenant un grand nombre de pas : c'est par exemple le cas de cette marche aléatoire au bout de 1000 pas qui est déjà assez éloignée de l'origine.

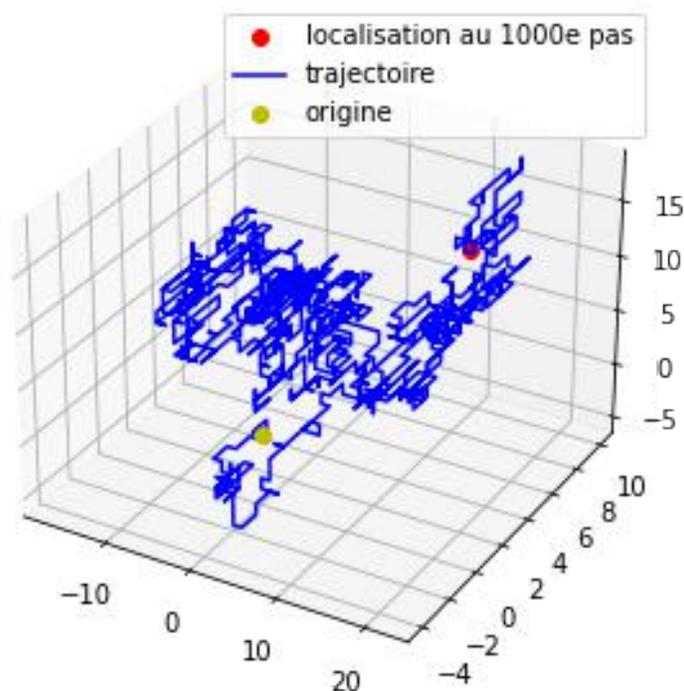


FIGURE 1.5 – Marche aléatoire dans \mathbb{Z}^3

Illustration 2. L'histogramme montre effectivement qu'au bout de 1000 pas et 5000 expériences, la probabilité de se perdre, c'est-à-dire de ne pas retrouver l'origine, est très loin d'être nulle.

Nous avons renouvelé notre expérience avec 50000 réalisations de chemins majorés par 100000 pas, et nous obtenons une probabilité de rentrer de 0.33963 qui est un peu plus petite que celle correspondant à l'histogramme ci-dessous qui est de 0.351.

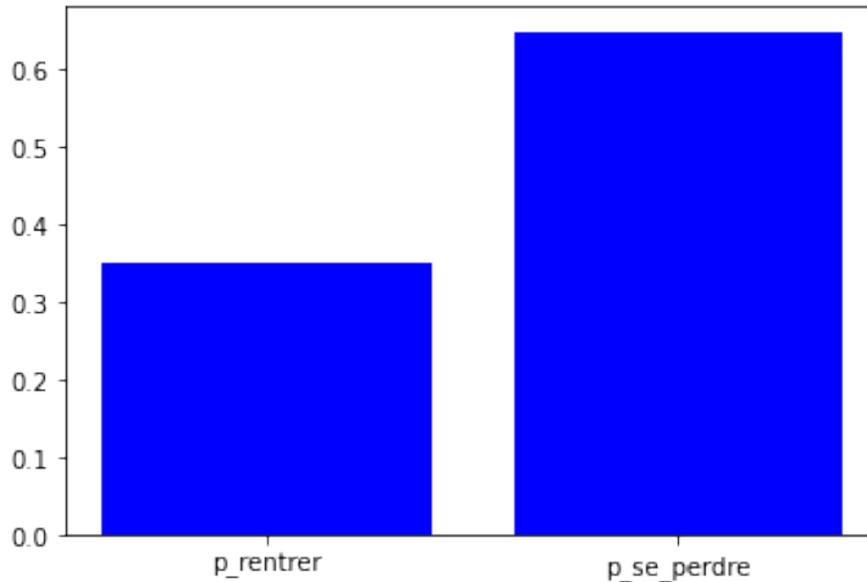


FIGURE 1.6 – Histogramme de la probabilité de rentrer ou non dans \mathbb{Z}^3 pour 1000 pas

Illustration 3. Dans le cas transient, la probabilité de revenir en 0 en un temps fini suit une loi géométrique $\mathcal{G}(1 - \mathbb{P}(R))$. Nous avons donc comparé l'histogramme du nombre de retours en 0 avec la loi géométrique souhaitée, avec 50000 expériences de marches majorées par 1000 pas.

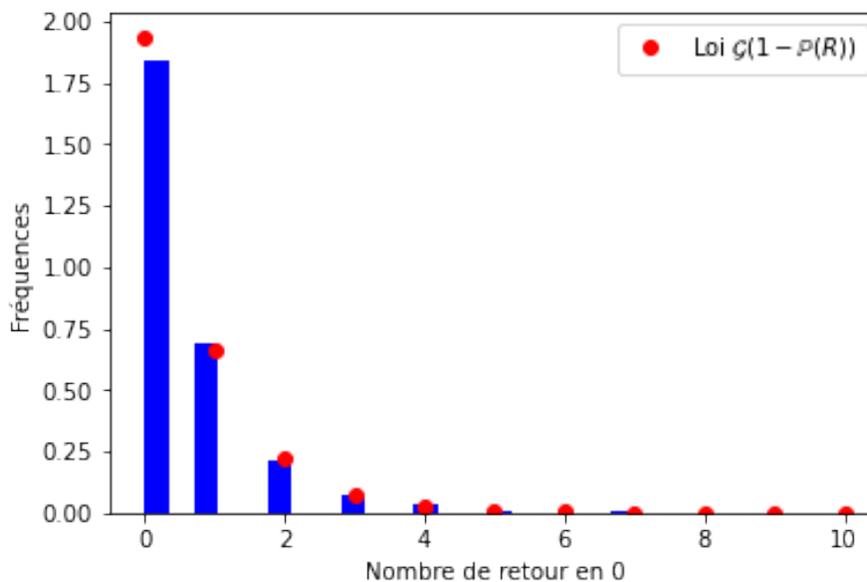


FIGURE 1.7 – Histogramme du nombre de retours en 0 dans \mathbb{Z}^3 pour 1000 pas

1.4.3 Cas d'une dimension quelconque

Illustration. Plus généralement, voici un graphe estimant, à partir de 10000 expériences de 50000 pas, pour chaque dimension la probabilité de rentrer. Si la probabilité de rentrer en moins de 50000 en dimensions 1 et 2 avoisine les 1, celle de rentrer pour les dimensions supérieures décroît très rapidement.

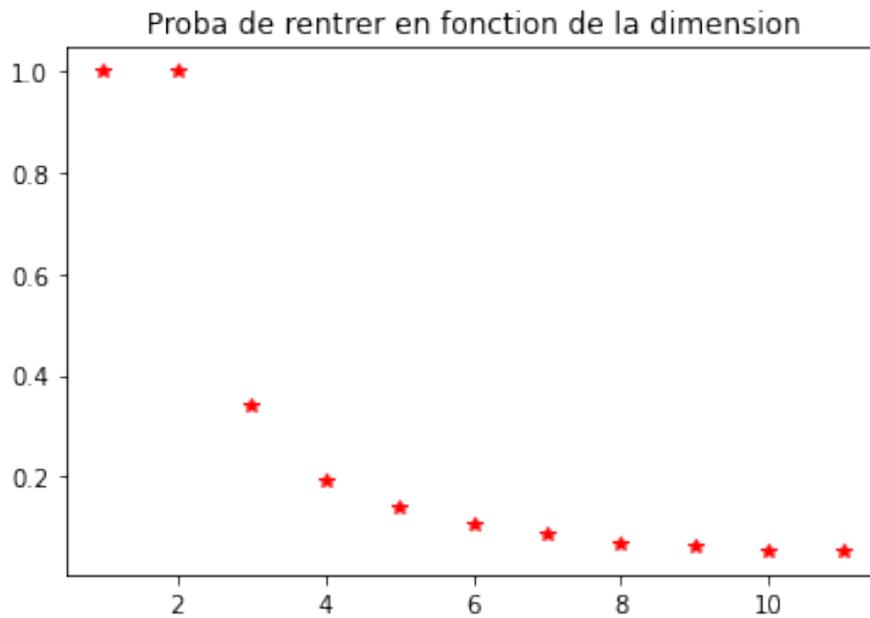


FIGURE 1.8 – Marche aléatoire dans Z^n

CHAPITRE 2

PREUVE : VERSION ANALYTIQUE

Dans cette partie, nous allons faire une preuve alternative du théorème de Pólya, avec cette fois une approche analytique. Nous garderons les mêmes notations que celles utilisées dans la première partie.

Pour rappel, le théorème 1.2 nous affirme que la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X_n = 0)$ diverge.

Le but est de redémontrer ce résultat mais à l'aide d'outils analytiques.

2.1 Les fonctions caractéristiques

Définition 2.1.1.

On définit ϕ la fonction caractéristique de ξ_1 comme suit :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longmapsto \mathbb{E}[e^{2i\pi \langle x, \xi_1 \rangle}]. \end{cases}$$

Définition 2.1.2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction ϕ_n , fonction caractéristique de X_n , est définie par :

$$\phi_n : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longmapsto \mathbb{E}[e^{2i\pi \langle x, X_n \rangle}]. \end{cases}$$

Proposition 2.1.1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons la relation suivante :

$$\phi_n(x) = \phi^n(x).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les variables (ξ_k) étant i.i.d, on a $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\phi_n(x) &= \mathbb{E}[e^{2i\pi \langle x, \sum_{k=1}^n \xi_k \rangle}] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n e^{2i\pi \langle x, \xi_k \rangle}\right] \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{2i\pi \langle x, \xi_k \rangle}] \\ &= \phi^n(x).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.1.2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \int_{[0,1]^d} \phi_n(x) dx.$$

Démonstration. En utilisant la définition de l'espérance et le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^d} \phi_n(x) dx &= \int_{[0,1]^d} \mathbb{E}[e^{2i\pi \langle x, X_n \rangle}] dx \\ &= \int_{[0,1]^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{2i\pi \langle x, k \rangle} \mathbb{P}(X_n = k) dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(X_n = k) \int_{[0,1]^d} e^{2i\pi \langle x, k \rangle} dx.\end{aligned}$$

Remarquons que les fonctions $x_j \mapsto e^{2i\pi \langle x_j, k_j \rangle}$ sont bornées.

Ainsi, d'après le théorème de Fubini on a, pour tout $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$,

$$\int_{[0,1]^d} e^{2i\pi \langle x, k \rangle} dx = \prod_{j=1}^d \int_{[0,1]} e^{2i\pi x_j k_j} dx_j.$$

Or, pour tout $k_j \in \mathbb{Z}$, on a

si $k_j \neq 0$,

$$\int_0^1 e^{2i\pi x_j k_j} dx_j = \frac{-i}{2k_j \pi} \left[e^{2i\pi x_j k_j} \right]_0^1 = \frac{-i}{2k_j \pi} ((e^{2i\pi})^{k_j} - 1) = \frac{-i}{2k_j \pi} (1^{k_j} - 1) = 0.$$

si $k_j = 0$,

$$\int_0^1 e^{2i\pi x_j k_j} dx_j = \int_0^1 dx_j = 1.$$

Ainsi, $\int_{[0,1]^d} e^{2i\pi \langle x, k \rangle} dx = \prod_{j=1}^d \mathbb{1}_{\{0\}}(k_j) = \mathbb{1}_0(k)$.

De ce fait, on peut conclure que $\int_{[0,1]^d} \phi_n(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{1}_{\{0\}}(k) = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

□

Pour la suite, notons $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$.

Théorème 2.1.

Pour la marche $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} X_0 = 0. \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k \end{cases}$ et pour ϕ définie dans la définition 2.1.1, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \int_{[0,1]^d} \frac{dx}{1 - \phi(x)} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Démonstration. Commençons par montrer que la fonction $\frac{1}{1-\phi}$ est bien définie et continue sur $[0, 1]^d \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$, on a

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \mathbb{E}(e^{2i\pi \langle x, \xi_1 \rangle}) \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^d (e^{2i\pi \langle x, -e_k \rangle} + e^{2i\pi \langle x, e_k \rangle}) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos(2\pi x_k). \end{aligned} \tag{2.1}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on peut affirmer que $|\phi(x)| \leq 1$.

De plus, $\phi(x) = 1$ si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$, $\cos(2\pi x_k) = 1$, c'est-à-dire si seulement et seulement si $x \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Ainsi, la fonction $\frac{1}{1-\phi}$ est bien définie sur $[0, 1]^d \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, et elle est continue par continuité de ϕ .

Nous pouvons maintenant prouver l'égalité énoncée dans le théorème.

La fonction ϕ étant bornée par 1, pour tout $\epsilon \in [0, 1[$, on a $|\epsilon\phi| \leq \epsilon < 1$.

De ce fait, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} (\epsilon\phi)^n$ converge normalement et donc aussi uniformément. Ce qui nous permet d'intervertir série et intégrale, et ainsi d'obtenir

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^d} \frac{dx}{1 - \epsilon\phi(x)} &= \int_{[0,1]^d} \sum_{n=0}^{+\infty} (\epsilon\phi)^n(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n \int_{[0,1]^d} \phi^n(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n \mathbb{P}(X_n = 0) \text{ par la proposition 2.1.1.} \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence monotone, on peut conclure que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \epsilon^n \mathbb{P}(X_n = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n \mathbb{P}(X_n = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \int_{[0,1]^d} \frac{dx}{1 - \epsilon\phi(x)}. \tag{2.2}$$

Maintenant, posons $P^+ := [0, 1]^d \cap \phi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $P^- := [0, 1]^d \cap \phi^{-1}(\mathbb{R}_-)$.

En appliquant de nouveau le théorème de convergence monotone, on obtient dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, l'égalité :

$$\int_{P^+} \frac{dx}{1 - \phi(x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \int_{P^+} \frac{dx}{1 - \epsilon\phi(x)}. \tag{2.3}$$

La fonction $\frac{1}{1-\phi}$ étant positive sur P_+ , $\int_{P_+} \frac{dx}{1-\phi(x)}$ est convergente dans \mathbb{R}_+ ou vaut $+\infty$.
De façon similaire, on obtient également

$$\int_{P^-} \frac{dx}{1-\phi(x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \int_{P^-} \frac{dx}{1-\epsilon\phi(x)}. \quad (2.4)$$

La fonction $\frac{1}{1-\phi}$ est bornée par 1 sur P^- qui est de mesure finie. En effet, $[0, 1]^d$ est de mesure finie donc son intersection avec un autre ensemble le sera aussi. On a donc que les intégrales $\int_{P^-} \frac{dx}{1-\epsilon\phi(x)}$, avec $\epsilon \in [0, 1[$, et $\int_{P^-} \frac{dx}{1-\phi(x)}$ sont finies.

Il est donc possible de sommer les deux égalités précédentes (2.3) et (2.4) afin d'obtenir, dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, la relation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^d} \frac{dx}{1-\phi(x)} &= \int_{P_+} \frac{dx}{1-\phi(x)} + \int_{P^-} \frac{dx}{1-\phi(x)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \int_{P_+} \frac{dx}{1-\epsilon\phi(x)} + \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \int_{P^-} \frac{dx}{1-\epsilon\phi(x)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \left(\int_{P_+} \frac{dx}{1-\epsilon\phi(x)} + \int_{P^-} \frac{dx}{1-\epsilon\phi(x)} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \int_{[0,1]^d} \frac{dx}{1-\epsilon\phi(x)}. \end{aligned}$$

Donc, par ce qui a été montré dans l'équation (2.2), on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \int_{[0,1]^d} \frac{dx}{1-\phi(x)},$$

ce qui achève la preuve de ce théorème. □

Le développement limité en 0 du cosinus appliqué a l'équation (2.2), qui pour rappel nous donne l'égalité $\phi(x) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos(2\pi x_k)$, nous permet d'explicitier un équivalent de $1 - \phi(x)$ en 0 qui est

$$\begin{aligned} 1 - \phi(x) &= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d (1 - \cos(2\pi x_k)) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \left(\frac{(2\pi x_k)^2}{2} + o(x_k^2) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2\pi^2}{d} \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

De plus, on remarque également par l'équation (2.1), que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\phi(\mathbf{1} - x) = \phi(x)$. Ainsi, un équivalent de $1 - \phi(x)$ en $\mathbf{1}$, soit quand $\mathbf{1} - x \rightarrow \mathbf{0}$, est

$$1 - \phi(x) = 1 - \phi(\mathbf{1} - x) \underset{x \rightarrow \mathbf{1}}{\sim} \frac{2\pi^2}{d} \|\mathbf{1} - x\|_2^2.$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-\phi(x)} \underset{x \rightarrow \mathbf{0}}{\sim} \frac{d}{2\pi^2 \|x\|_2^2} \\ \frac{1}{1-\phi(x)} \underset{x \rightarrow \mathbf{1}}{\sim} \frac{d}{2\pi^2 \|\mathbf{1}-x\|_2^2} \end{array} \right. .$$

On a ainsi

$$\int_{[0,1]^d} \frac{dx}{1-\phi(x)} < +\infty \iff \int_{\mathcal{B}(\mathbf{0},1)} \frac{dx}{\|x\|_2^2} < +\infty \text{ et } \int_{\mathcal{B}(\mathbf{1},1)} \frac{dx}{\|\mathbf{1}-x\|_2^2} < +\infty.$$

On procède au changement de variable $y = \mathbf{1} - x$ dans l'intégrale $\int_{\mathcal{B}(\mathbf{1},1)} \frac{dx}{\|\mathbf{1}-x\|_2^2}$
Dès lors, les intégrales sont toutes deux finies ou toutes deux infinies, et

$$\int_{[0,1]^d} \frac{dx}{1-\phi(x)} < +\infty \iff \int_{\mathcal{B}(\mathbf{0},1)} \frac{dx}{\|x\|_2^2} < +\infty. \quad (2.5)$$

Le problème revient alors à montrer le résultat suivant.

Théorème 2.2.

$$\int_{\mathcal{B}(\mathbf{0},1)} \frac{dx}{\|x\|_2^2} < +\infty \iff d \notin \{1, 2\}.$$

Démonstration. On passe en premier lieu en coordonnées polaires généralisées

$$\Theta :]0, 1[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{d-1} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{0}, 1)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{d-2} \\ \sigma_{d-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi \cos(\sigma_1) \\ \varphi \sin(\sigma_1) \cos(\sigma_2) \\ \vdots \\ \varphi \sin(\sigma_1) \cdots \sin(\sigma_{d-2}) \cos(\sigma_{d-1}) \\ \varphi \sin(\sigma_1) \cdots \sin(\sigma_{d-2}) \sin(\sigma_{d-1}) \end{pmatrix}$$

C'est un difféomorphisme car les fonctions $x \mapsto \cos$ et $x \mapsto \sin$ sont des difféomorphismes de $\mathcal{B}(\mathbf{0}, 1)$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc par composition de difféomorphismes, Θ en est un. Son jacobien est

$$\mathcal{J}_\Theta : \begin{pmatrix} \varphi \\ \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{d-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\sigma_1) & -\varphi \sin(\sigma_1) & \cdots & 0 \\ \sin(\sigma_1) \cos(\sigma_2) & \varphi \cos(\sigma_1) \cos(\sigma_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(\sigma_1) \cdots \cos(\sigma_{d-1}) & \varphi \cos(\sigma_1) \cdots \cos(\sigma_{d-1}) & \cdots & -\varphi \sin(\sigma_1) \cdots \sin(\sigma_{d-1}) \\ \sin(\sigma_1) \cdots \sin(\sigma_{d-1}) & \varphi \cos(\sigma_1) \cdots \sin(\sigma_{d-1}) & \cdots & \varphi \sin(\sigma_1) \cdots \cos(\sigma_{d-1}) \end{pmatrix}$$

On a alors $|\mathcal{J}_{\varphi, \sigma}(\varphi, \sigma)| = \varphi^{d-1} |\mathcal{J}_{1, \sigma}(1, \sigma)|$ pour tout $(\varphi, \sigma) \in]0, 1[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{d-1}$ par multilinéarité du déterminant.

Ainsi, grâce au changement de variable et au théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(\mathbf{0},1)} \frac{dx}{\|x\|_2^2} &= \int_{]0,1[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{d-1}} \frac{1}{\varphi^2} \varphi^{d-1} |\mathcal{J}_{1, \sigma}| d\varphi d\sigma \\ &= \int_{]0,1[} \varphi^{d-3} d\varphi \int_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{d-1}} |\mathcal{J}_{1, \sigma}| d\sigma. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Assertion : $\sigma \mapsto \mathcal{J}_{1, \sigma}$ est une fonction intégrable.

Preuve assertion : Nous avons en effet

$$\begin{aligned}
 \text{vol}(\mathcal{B}(\mathbf{0}, 1)) &= \int_{\mathcal{B}(\mathbf{0}, 1)} dx \\
 &= \int_{]0, 1[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{d-1}} |\mathcal{J}_{\varphi, \sigma}(\varphi, \sigma)| d\varphi d\sigma \\
 &= \int_{]0, 1[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{d-1}} \varphi^{d-1} |\mathcal{J}_{1, \sigma}(1, \sigma)| d\varphi d\sigma \\
 &= \int_{]0, 1[} \varphi^{d-1} d\varphi \int_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{d-1}} |\mathcal{J}_{1, \sigma}(1, \sigma)| d\sigma \\
 &= \frac{1}{d} \int_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{d-1}} |\mathcal{J}_{1, \sigma}(1, \sigma)| d\sigma.
 \end{aligned}$$

Le volume de la boule unité $\mathcal{B}(\mathbf{0}, 1)$ est fini donc $\sigma \mapsto \mathcal{J}_{1, \sigma}(1, \sigma)$ est intégrable sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{d-1}$.

Grâce à l'équation (2.6), on obtient

$$\int_{\mathcal{B}(\mathbf{0}, 1)} \frac{dx}{\|x\|_2^2} < +\infty \iff \int_{]0, 1[} \varphi^{d-3} d\varphi < +\infty.$$

Cette dernière intégrale est convergente si et seulement $d \notin \{1, 2\}$ d'après le critère de Riemann. \square

2.2 Conclusion

L'ensemble des résultats montrés dans cette partie nous permettent d'obtenir les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 d \notin \{1, 2\} &\iff \int_{\mathcal{B}(\mathbf{0}, 1)} \frac{dx}{\|x\|_2^2} < +\infty \text{ par le théorème 2.2} \\
 &\iff \int_{[0, 1]^d} \frac{dx}{1 - \phi(x)} < +\infty \text{ par l'équation (2.5)} \\
 &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) < +\infty \text{ par le théorème 2.1.}
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré de façon analytique, que la marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X_n = 0)$ est divergente. Cela se produit si et seulement si $d \in \{1, 2\}$.

Nous avons donc, de nouveau, démontré le théorème de Pólya, mais cette fois-ci grâce à des outils analytiques.

CONCLUSION

Nous avons montré d'un point de vue combinatoire puis analytique, lorsque les probabilités d'emprunter chaque pas sont uniformes, qu'une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d est récurrente si et seulement si $d < 3$. Ainsi, nous avons pu utiliser des outils mathématiques différents tels que des calculs probabilistes pour la preuve par le dénombrement et le calcul intégral pour la preuve analytique. Même si cette dernière peut paraître plus difficile, elle offre néanmoins l'avantage de pouvoir déterminer la probabilité de rentrer dans le cas transient.

Le théorème de Pólya est vu, dans le langage courant, comme une modélisation de la marche de l'ivrogne. Nous avons donc illustrer ce phénomène en prenant pour exemple un homme et un oiseau tous les deux ivres, respectivement sur \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 qui marquent le point de rupture entre récurrence et transience.

Il peut aussi être intéressant d'étudier le cas où les probabilités de chaque déplacements ne sont pas équiprobables. Sous cette hypothèse, le résultat serait tout autre...



POUR ALLER PLUS LOIN...

Dans cette partie, nous allons vous présenter quelques pistes de travail que nous aurions pu traiter si nous avions eu plus de temps.

Chapitre 1 : Preuve : version dénombrement.

☞ Cas non équiprobable :

Considérons le cas $\mathbb{Z}_d = \mathbb{Z}$. Si l'on suppose, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, que $\mathbb{P}(\xi_k = -1) = 0,3$ et $\mathbb{P}(\xi_k = 1) = 0,7$ alors notre marcheur va diverger vers l'infini même s'il se trouve en dimension 1.

Il est possible de montrer cette divergence en utilisant le théorème de la loi forte des grands nombres. Il aurait pu être possible de comparer les différents résultats obtenus en faisant varier les différentes probabilités.

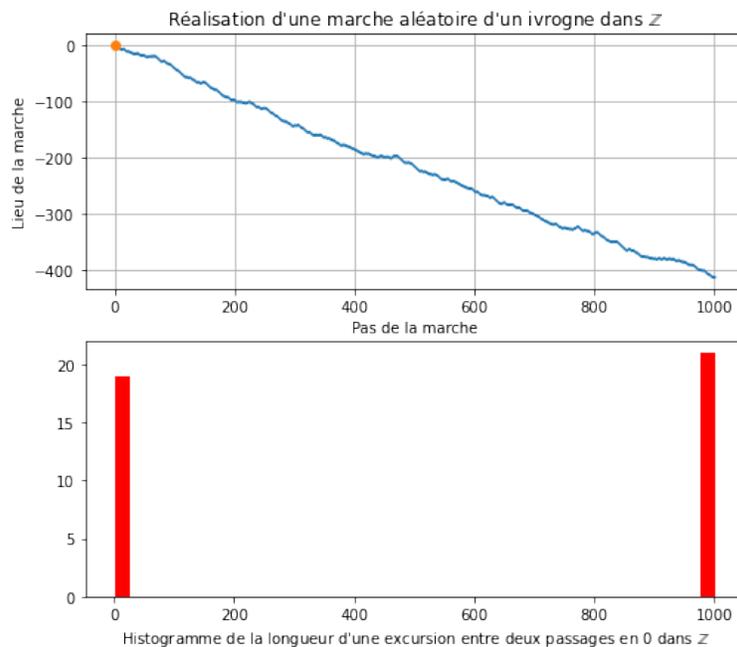


FIGURE 2.1 – Histogramme du nombre de retours en 0 dans \mathbb{Z} pour 100 pas lorsque les probabilités de déplacements sont 0,3 et 0,7

- ☞ Nous aurions pu regarder le cas où les déplacements $(\xi_k)_{k \geq 1}$ ne sont pas indépendants.
- ☞ Une preuve du lemme 1.2.1 aurait pu être donnée. Il s'agirait de montrer que les variables aléatoires X'_n sont à valeurs dans $\mathbb{Z}^{d'}$, que $X_0 = 0$ et que les variables aléatoires $X'_{n+1} - X'_n$ sont i.i.d de loi uniforme sur $\{-e_1, e_1, \dots, -e_d, e_d\}$ en utilisant la propriété de Markov forte.
- ☞ On peut remarquer que la marche aléatoire dans \mathbb{Z} est un cas de récurrence positive (Rappel : Un état est *récurremment positif* si la probabilité de revenir à cet état est égale à 1 et le temps moyen de retour est fini) et celle dans \mathbb{Z}^2 est un cas de récurrence nulle (Rappel : Un état est *récurremment nul* si la probabilité de revenir à cet état est égale à 1 mais le temps moyen de retour est infini).

Chapitre 2 : Preuve : version analytique.

- ☞ Un avantage de la version analytique de cette preuve est qu'il est possible de calculer explicitement $\mathbb{P}(R)$, la probabilité de retour en 0 en un temps fini. En effet, $\frac{1}{\mathbb{P}(R)} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$.
En 1977, Glasser et Zucker ont montré qu'en dimension $d = 3$ cette probabilité vaut $\mathbb{P}(R) \approx 0,3405373296$. De plus, plus d grandit plus cette probabilité est petite. En effet, les approximations numériques suivantes nous le confirment.

$$\mathbb{P}(R) \approx 0,1932 \text{ si } d = 4,$$

$$\mathbb{P}(R) \approx 0,1047 \text{ si } d = 6,$$

$$\mathbb{P}(R) \approx 0,1352 \text{ si } d = 5,$$

$$\mathbb{P}(R) \approx 0,0858 \text{ si } d = 7.$$

Implémentation sur Python

► Dans \mathbb{Z}

☞ Nous commençons par définir un pas avec la fonction `d_1()`, dans le cas de \mathbb{Z} , nous choisissons simplement si nous allons à gauche ou bien à droite avec la même probabilité.

La fonction suivante, nommée `chemin_1()`, donne un chemin qui commence en 0 et s'arrête au premier retour en 0. Ainsi nous pouvons obtenir graphiquement une réalisation d'une marche sur \mathbb{Z} .

```
def d_1():
    r = random()
    if r < 0.5:
        return -1
    else: return 1

def chemin_1():
    Cy = [0,d_1()]
    Cx = [0,1]
    i = 1
    while Cy[-1]!=0:
        Cy += [Cy[-1]+d_1()]
        i += 1
        Cx += [i]
    return [Cx,Cy]

C = chemin_1()
plt.plot(C[0],C[1])
plt.plot(0,0,"o")
plt.title("Réalisation d'une marche aléatoire d'un ivrogne dans  $\mathbb{Z}$ ")
plt.grid()
plt.show()
```

☞ Vient ensuite notre premier histogramme `trace_hist_1(n)`, qui, pour n réalisations, nous donne un histogramme de la longueur d'un chemin de 0 au premier retour en 0. En le compilant, nous observons que la plupart des chemins sont vraiment très courts.

```
def trace_hist_1(n):
    L = [len(chemin_1()[0]) for i in range(n)]
    plt.subplot(2,1,1)
    plt.hist(L,bins=40,range=(1,max(L)),color="red") # tous les résultats
    plt.title("Fréquence d'apparition de la longueur d'un chemin aléatoire dans,
     $\mathbb{R}$ ")
    plt.subplot(2,1,2)
    plt.hist(L,bins=40,range=(1,40),color="red") # marches les plus courantes
    plt.show()
```

↳ `chemin_1p(m,p)` donne aussi une réalisation d'une marche dans \mathbb{Z} mais ne s'arrête pas au premier retour en 0. Elle fait m pas avec probabilité p d'aller à droite. Nous sommes dans un cas de transience si $p \neq \frac{1}{2}$. Alors, attendre un retour en 0 rendrait le temps d'exécution de la fonction Python très long. Ce qui montre l'importance de la variable m .

La fonction `pas(p)` est la fonction qui donne aléatoirement un pas à gauche ou à droite avec probabilité p d'aller à droite.

```
def pas(p):
    r = random()
    if r < p:
        return -1
    else: return 1

def chemin_1p(m,p):
    Cy = [0,pas(p)]
    Cx = [0,1]
    i = 1
    while i<m:
        Cy += [Cy[-1]+pas(p)]
        i += 1
        Cx += [i]
    return [Cx,Cy]
```

↳ `trace_chem_diff_1(n,m,p)` donne :

- une réalisation d'un chemin avec m pas, tel que, la probabilité d'aller à droite est p .
- un histogramme de la longueur d'une excursion, entre deux passages en 0, dans \mathbb{Z} . On majore cette longueur par m afin de limiter le temps d'exécution.. Si $p = \frac{1}{2}$, l'historgramme est restreint aux chemins de moins de 40 pas car il les dépasse rarement. Sinon, on laisse inchangée l'échelle afin de voir l'accumulation des chemins à m pas dans le cas transient.

```
def trace_chem_diff_1(n,m,p):
    C = chemin_1p(m,p)

    fig = plt.figure(figsize=[8,7])
    plt.subplot(2,1,1)
    plt.plot(C[0],C[1])
    plt.plot(0,0,"o")
    plt.title("Réalisation d'une marche aléatoire d'un ivrogne dans_
↳ $\mathbb{Z}$")
    plt.xlabel('Pas de la marche')
    plt.ylabel('Lieu de la marche')
    plt.grid()

    L = [len(chemin_1p(m,p)[0]) for i in range(n)]

    if p == 1/2:
        plt.subplot(2,1,2)
        plt.hist(L,bins=40,range=(1,40),color="red") # marches les plus_
↳ courantes
        plt.xlabel("Histogramme de la longueur d'une excursion entre deux_
↳ passages en 0 dans $\mathbb{Z}$")
    else:
        plt.subplot(2,1,2)
        plt.hist(L,bins=40,color="red") # marches les plus courantes
        plt.xlabel("Histogramme de la longueur d'une excursion entre deux_
↳ passages en 0 dans $\mathbb{Z}$")

    plt.show()
```

► Dans \mathbb{Z}^2

- ☞ Comme pour le cas de \mathbb{Z} , nous commençons par définir un déplacement dans \mathbb{Z}^2 grâce à la fonction `deplacement_ds_R2()`. On suppose que toutes les directions sont équiprobables.

```
def deplacement_ds_R2():
    r = random()
    if 0 < r < 0.25:
        d = [0,1]
    elif 0.25 < r < 0.5:
        d = [0,-1]
    elif 0.5 < r < 0.75:
        d = [-1,0]
    else:
        d = [1,0]
    return d
```

- ☞ Nous sommes dans un cas de récurrence. La fonction `chemin_dans_R2D()` nous donne une liste de positions décrivant la réalisation d'une marche aléatoire en commençant en 0, et, en s'arrêtant au premier retour en 0. Le nombre de pas d'une marche est majoré par 100000 pour éviter que le programme ne tourne trop longtemps.

```
def chemin_dans_R2D():
    P,n,D = [0,0],0,[[0,0]]
    while (P!=[0,0] or n==0) and n < 100000:
        d = deplacement_ds_R2()
        P = [P[0]+d[0],P[1]+d[1]]
        D += [P]
        n += 1
    return D
```

- ☞ Nous traçons alors graphiquement une réalisation d'un chemin dans \mathbb{Z}^2 et nous affichons précisément le nombre de pas qu'il a fallu pour retourner en l'origine.

```
C = chemin_dans_R2D()
n = len(C)
X,Y = [],[]
for i in range(n):
    X+= [C[i][0]]
    Y+= [C[i][1]]

plt.plot(X,Y)
plt.plot(0,0,'ro')
plt.title("Marche aléatoire d'un ivrogne dans  $\mathbb{Z}^2$ ")
plt.grid()

plt.show()

print(n-1,"pas")
```

- ☞ `histo2(N)` donne un histogramme de la longueur d'une excursion entre deux passages en 0 dans \mathbb{Z}^2 . L'histogramme est restreint aux chemins de moins de 30000 pas, puisque ces chemins sont rares.

```
def histo2(N):
    L = [len(chemin_dans_R2D()) for i in range(N)]
    plt.hist(L,bins=30,range=(1,30000),color="red") # marches les plus courantes
    plt.xlabel("Histogramme de la longueur d'une excursion entre deux passages en 0 dans  $\mathbb{Z}^2$ ")
    plt.show()
```

► Dans \mathbb{Z}^3

- ☞ Comme dans les cas de \mathbb{Z} et \mathbb{Z}^2 , nous avons créé la fonction `deplacement_ds_R3()` pour avoir un pas dans \mathbb{Z}^3 avec équiprobabilité dans chacune des 6 directions.

```
def deplacement_ds_R3():
    r = random()
    if 0 < r < 1/6:
        d = [0,0,1]
    elif 1/6 < r < 1/3:
        d = [0,0,-1]
    elif 1/3 < r < 1/2:
        d = [0,-1,0]
    elif 1/2 < r < 2/3:
        d = [0,1,0]
    elif 2/3 < r < 5/6:
        d = [-1,0,0]
    else:
        d = [1,0,0]
    return d
```

- ☞ De même que précédemment, la fonction `chemin_dans_R3D(n)` nous renvoie une liste de positions pour un chemin dans \mathbb{Z}^3 . Comme nous sommes dans un cas transient, nous limitons le chemin à n pas. Nous choisissons un n assez grand pour avoir une position relativement éloignée de l'origine. On a alors une probabilité très faible que la personne retrouve son chemin en étant si éloignée de l'origine.

```
def chemin_dans_R3D(n):
    P,D = [0,0,0],[[0,0,0]]
    for i in range(n):
        d = deplacement_ds_R3()
        P = [P[0]+d[0],P[1]+d[1],P[2]+d[2]]
        D += [P]
    return D
```

↳ **trace_Z3**(n) est une fonction qui trace la trajectoire d'une marche dans \mathbb{Z}^3 et qui précise si le marcheur est revenu à l'origine ou non.

Il faut noter que si l'on ne peut pas faire tourner la figure 3D obtenue sur notebook, des logiciels comme Pyzo permettent de le faire.

```
def trace_Z3(n):

    fig = plt.figure()
    ax = fig.gca(projection='3d')

    C = chemin_dans_R3D(n)
    nb_z = [0,0,0] in C[1::]
    if nb_z == 0:
        plt.
    plot([C[-2][0],C[-1][0]], [C[-2][1],C[-1][1]], [C[-2][2],C[-1][2]], color='blue')
    plt.plot(C[-1][0],C[-1][1],C[-1][2], 'ro', label='localisation au {}e_L
    pas'.format(n))
    X,Y,Z = [0], [0], [0]
    for i in range(1,n):
        X+=C[i][0]
        Y+=C[i][1]
        Z+=C[i][2]
        if [X[-1],Y[-1],Z[-1]]==[0,0,0]: break

    ax.plot(X,Y,Z,label='trajectoire', color='blue')
    plt.plot(0,0,0, 'yo', label="origine")
    plt.legend(loc='best')
    plt.tight_layout()
    if nb_z: print("L'alcoolique est rentré")
    else: print("L'alcoolique s'est perdu")
    plt.show()
```

↳ **nb0Z3**(n, N) renvoie un histogramme du nombre de retours en 0 pour N chemins de n pas, superposé avec la loi géométrique $\mathcal{G}(1 - \mathbb{P}(R))$ où $\mathbb{P}(R)$ est une estimation de la probabilité de rentrer.

```
def nb0Z3(n,N): # P(R) est environ égale à 0.3405373296
    Z = [chemin_dans_R3D(n).count([0,0,0])-1 for i in range(N)]
    plt.hist(Z, bins=20, color='blue', density=1)
    x = np.linspace(0, 10, 11)
    y = (0.3405373296**x)*(1-0.3405373296)
    plt.plot(x,y, 'ro', label='Loi $\mathcal{G}(1-\mathbb{P}(R))$')
    plt.xlabel('Nombre de retour en 0')
    plt.ylabel('Fréquences')
    plt.legend(loc='best')
    plt.show()
```

↳ **proba_de_rentre**(n, N) permet, avec N réalisations de chemins de n pas, de donner une approximation numérique de la probabilité de rentrer.

```
def proba_de_rentre(n,N): # n = nb_pas dans un chemin et N = nb_expériences
    compteur = 0
    for i in range(N):
        C = chemin_dans_R3D(n)
        if [0,0,0] in C[1::]: compteur+=1
    return compteur/N
```

► Dans \mathbb{Z}^n

- ☞ La fonction `deplacement_ds_Zn(n)` permet d'avoir un pas en dimension n : on choisit la coordonnée sur laquelle on fait le déplacement, de façon équiprobable. Puis, on choisit la direction de ce déplacement, à savoir donner aléatoirement 1 ou -1. Nous avons donc représenté un pas par une liste de n coordonnées.

```
def deplacement_ds_Zn(n): # la dimension n est à préciser
    p = np.random.randint(0,n)
    v = choice([1,-1])
    L = [0]*n
    L[p] += v
    return L
```

- ☞ La fonction `chemin_dans_Zn(n,pas)` donne une réalisation d'un chemin en dimension n limité à un certain nombre de pas pour éviter de boucler trop longtemps dans les cas de transience. Si le chemin retourne à l'origine, il s'arrête immédiatement.

```
def chemin_dans_Zn(n,pas): # n=dim et pas=nb_déplacements
    P,D = [0]*n,[[0]*n]
    for i in range(pas):
        d = deplacement_ds_Zn(n)
        L = []
        for k in range(n):
            L += [P[k]+d[k]]
        P = L
        D += [P]
        if D[-1] == [0]*n:
            return D
    return D
```

- ☞ `proba_de_rentre_n(n,pas,N)` donne, avec N réalisations de chemins de chacun pas pas, une approximation numérique de la probabilité de rentrer en dimension n .

```
def proba_de_rentre_n(n,pas,N): # n=dim, pas = nb_pas dans un chemin et N =
    nb_expériences
    compteur = 0
    for i in range(N):
        C = chemin_dans_Zn(n,pas)
        if [0]*n in C[1::]: compteur+=1
    return compteur/N
```

- ↳ Finalement, nous souhaitons tracer un graphique de la probabilité de rentrer en fonction de la dimension choisie. La fonction `trace_proba_de_rentre_dim_n(dim, pas, N)` le permet, avec `dim` une liste de dimensions. Ainsi, pour chacune des dimensions de cette liste, nous calculons, à l'aide de la fonction précédente, la probabilité de rentrer en faisant `N` expériences de `pas` pas.

```
def trace_proba_de_rentre_dim_n(dim,pas,N): # dim = liste de dim (ordre_
    ↪croissant), pas = nb_pas dans un chemin et N = nb_expériences
    if 1 in dim: # pour n = 1 ou 2, on a déjà fait les tests au début et on_
    ↪sait que p = 1
        plt.plot(1,1,'r*')
        dim = dim[1::]
    if 2 in dim:
        plt.plot(2,1,'r*')
        dim = dim[1::]
    n = len(dim)
    for i in range(n):
        p = proba_de_rentre_n(dim[i],pas,N)
        plt.plot(dim[i],p,'r*')
        plt.title('Proba de rentrer en fonction de la dimension')
    plt.show()
```

Attention, faire tourner cette fonction peut donc être long ! (Approximativement 6 heures.)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GOURDON Xavier. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités - 3e édition*. ellipses, 2021.
- [2] LESESVRE Didier, MONTAGNON Pierre, and LE BARBENCHON Pierre. *131 développements pour l'oral - Agrégation externe mathématiques / informatique*. DUNOD, 2020.
- [3] ZAVIDOVIQUE Maxime. *Un Max de Math : Problèmes pour agrégatifs et mathématiciens en herbe confirmés*. Calvage Mounet, 2013.
- [4] HERRMANN Samuel. *CM. Algorithmes Stochastiques*. 2022-2023.
- [5] Wikipédia. *Chaîne de Markov*. https://fr.wikipedia.org/wiki/Chaîne_de_Markov.
- [6] RUCH-MARIE-LINE CHABANOL Jean-Jaques. *Chaînes de Markov - Préparation à l'Agrégation Bordeaux 1*. <https://www.math.u-bordeaux.fr/~mchabano/Agreg/ProbaAgreg1213-COURS5-CM.pdf>, 2012-2013.
- [7] LOUSTAU Sébastien. *Chaînes de Markov et Processus markoviens de sauts. Applications aux files d'attente*. <https://math.univ-angers.fr/~loustau/polycomplet.pdf>, 2008-2009.