Poincaré ou la non-fabrique du sandwich

Adrien Pautre

06 mai 2023

Table des matières

Introduction

La question du partage de nourriture est un sujet sensible. S'il est difficile d'être exhaustif sur les différentes stratégies de partage d'un repas quelconque, ce mémoire va nous permettre de montrer l'existence d'un partage équitable entre deux personnes en une seule coupe dans le cas où le repas à partager est de la forme d'un "sandwich au jambon" ; composé de trois "tranches", quelque soit leur disposition. Nous ne pourrons malheureusement pas déterminer ladite coupe mais le fait de savoir qu'elle existe devrait combler de joie nos mangeurs de sandwich.

Pour répondre à cette question d'une importance capitale, nous allons devoir formaliser notre problème pour utiliser des objets mathématiques qui nous aideront à le résoudre. Parmi ces objets, mais surtout au coeur du mémoire, on trouvera l'homologie. Un outil très puissant dans l'étude des espaces topologiques qui consiste à associer des objets algébriques à des objets topologiques. Notre question de base servira surtout à motiver l'étude de l'homologie et mettre en lumière la puissance de l'objet lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes. Ici l'homologie va d'abord nous permettre de démontrer le théorème de Borsuk-Ulam qui nous dit entre autre que sur Terre il existe deux points antipodaux qui sont précisément à la même température et à la même altitude. Le théorème de Borsuk-Ulam nous permettera ensuite de démontrer notre résultat appelé Théorème du Sandwich au jambon.

Dans ce mémoire :

- Nous allons d'abord formaliser notre problème et poser les fondements théoriques dont nous aurons besoin.
- Nous allons ensuite étudier l'homologie des espaces.
- Nous terminerons en démontrant le théorème de Borsuk-Ulam puis le théorème du sandwich au jambon.

Chapitre 1

Fondements

1.1 Enoncés des théorèmes

1.1.1 Le théorème de Borsuk-Ulam

Le théorème de Borsuk-Ulam ne nécéssite pas de travail préliminaire, on peut l'énoncer de suite.

Théorème 1.1. *Soit $n \geq 1$, pour toute fonction $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ continue, il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

En particulier si $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire si on prend deux fonctions réelles continues de la position sur Terre (dont la surface s'apparente à $\mathbb{S}^2$), par exemple la tempérture et l'atlitude, alors il existe deux points antipodaux qui sont à la même température et à la même altitude.

1.1.2 Le théorème du sandwich au jambon et la théorie de la mesure

Pour énoncer le théorème du sandwich au jambon, nous allons devoir définir ce qu'est une "tranche", une "coupe" et ce qu'on entend par "partager équitablement". Si on veut faire un partage équitable, il va falloir mesurer les tranches. On va donc avoir besoin de faire quelques rappels de théorie de la mesure.

Théorie de la mesure

Une mesure est une application définie sur une tribu, nous allons donc définir ce qu'est une tribu.

Définition:
Soit $X \neq \emptyset$ une tribu sur X est une famille $\mathcal{A}$ de parties de X telle que :

— $\emptyset \in \mathcal{A}$,
— si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$,
— si $(A_n)_{n \in (N)}$ est une famille dénombrable de $\mathcal{A}$ alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Le couple $(X, \mathcal{A})$ s'appel un éspace mesurable.

Définition:
Une mesure $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ est une application qui vérifie :
— $\mu(\emptyset) = 0$,
— si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable disjointe de $\mathcal{A}$ alors

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ s'appel un espace mesuré. On dit que μ est complète si pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$, pour tout $B \subset A,\ \mu(B) = 0$.

Maintenant qu'on a définit ce qu'est une mesure, il faut en choisir une. Une mesure très naturelle est la mesure de Lebesgue qui coincide avec les volume sur les pavés.

Définition:
Un pavé dans $\mathbb{R}^n$ est une partie de la forme :

$$P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Avec $a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i \leq b_i$. Le volume de P est :

$$Vol(P) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Théorème 1.2. *Soit $n \geq 1$, il existe un unique espace mesuré $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda)$ tel que :*

- *$\mathcal{L}$ contient tout les pavés de $\mathbb{R}^n$, $\lambda(P) = Vol(P)$ pour tout pavé P, λ est complète.*
- *Si $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}', \lambda')$ vérifie le point précédent, alors $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ et $\lambda'(A) = \lambda(A)$ pour tout $A \in \mathcal{L}$.*

Définition:
Dans l'espace $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda)$ du théorème précédent, $\mathcal{L}$ s'appel la tribu de Lebesgue et λ la mesure de Lebesgue.

Maintenant qu'on peut mesurer nos tranches qui seront donc des ensembles mesurables bornés de $\mathbb{R}^n$ on va définir ce qu'est une coupe. Une coupe est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. On peut définir n'importe quel hyperplan de la manière suivante :

On considère $\mathbb{R}^n$ munit du produit scalaire standard $\langle\ .\ |\ .\ \rangle$ et $x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| = 1$, on note

$$P_{x,t} = \{y \in \mathbb{R}^n | \langle y|x \rangle = t\}$$

l'hyperplan perpendiculaire x passant par tx.

$P_{x,t}$ divise $\mathbb{R}^n$ en deux demi-epaces :

$$P_{x,t}^- = \{y \in \mathbb{R}^n | \langle y|x \rangle < t\} \text{ et } P_{x,t}^+ = \{y \in \mathbb{R}^n | \langle y|x \rangle > t\}.$$

On remarque :

$$P_{x,t} = P_{-x,-t}, P_{x,t}^+ = P_{-x,-t}^-, P_{-x,-t}^+ = P_{x,t}^-$$

On peut maintenant énoncer le théorème du sandwich au jambon :

Théorème 1.3. *soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que $A_i \subset \mathbb{R}^n$ mesurable et bornée. Il existe $x \in \mathbb{S}^n,\ t \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \lambda(A_i \cap P_{x,t}^+) = \lambda(A_i \cap P_{x,t}^-).$$

1.2 Topologie

Nous allons désormais nous donner les outils pour démontrer le théorème de Borsuk-Ulam. Nous allons d'abord avoir besoin de faire quelques rappels de topologie, et par la même occasion approfondir certaines notions.

1.2.1 Définitions

On commence par définir la notion d'un espace topologique général.

Définition:
Un espace topologique X est un ensemble muni d'une topologie $\mathcal{T}$. Une topologie est une collection de parties de X qui vérifie :

— $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}$,

— si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'élément de $\mathcal{T}$ alors $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$,

— si $(U_k)_{1\leq k\leq N}$ est une famille finie d'élément de $\mathcal{T}$ alors $\bigcap_k U_k \in \mathcal{T}$.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés des ouverts.

Une fois qu'on a construit une famille d'espaces, on peut considérer les "morphismes" de ces espaces. La notion de morphisme sera approfondie plus tard lorsque nous parleront de théorie des catégories. Les morphismes des espaces topologiques sont les applications continues.

Définition:
Soient $(X, \mathcal{T}_X),\ (Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ est continue si

$$\forall B \in \mathcal{T}_Y, f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X.$$

On cherche généralement à comparer et classifier les espaces à isomorphisme près. Les isomorphismes des espaces topologiques sont les homéomorphismes.

Définition:
Soit $X,\ Y$ deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ continue. f est un homéomophisme s'il existe $g : Y \to X$ continue telle que $f \circ g = id_Y,\ g \circ f = id_X$. On dit que X et Y sont homéomorphes.

la relation "être homéomorphe" est très forte, on va définir une relation plus faible d'équivalence pour les espaces topologiques.

Définition:
Soit $X,\ Y$ deux espaces topologiques, $f, g : X \to Y$ continues. On dit que f et g sont homotopes s'il existe une application continue

$$H : X \times [0, 1] \to Y,\ \forall x \in X,\ H(x, 0) = f(x),\ H(x, 1) = g(x).$$

On note $f \sim g$. Une application f est une équivalence d'homotopie s'il existe $g : Y \to X$ telle que $f \circ g \sim id_Y,\ g \circ f \sim id_X$. On dit alors que X et Y sont homotopiquement équivalents.

Définition:
Soit Y un espace topologique, X un sous-espace de Y. On note $\iota : X \to Y$ l'inclusion. Une rétraction de ι est une application continue $\rho : Y \to X$ telle que $\rho \circ \iota = id_X$. On dit que ρ est une retraction par déformation s'il existe $H : Y \times [0, 1] \to Y$ continue telle que :

$$\forall y \in Y,\ H(y, 0) = y,\ H(y, 1) = \rho(y) \in X,$$

$$\forall (x, t) \in X \times [0, 1],\ H(x, t) = x.$$

On dit alors que X est un retract par déformtion de Y. S'il existe $x_0 \in Y$ tel que $\{x_0\}$ soit un retract par déformation de Y, on dit que Y est contractile.

1.2.2 Quelques équivalences d'homotopie

Nous allons maintenant étudier l'équivalence de certains espaces qui nous seront utiles pour la suite.

Proposition:
$\mathbb{R}^n$ est contractile.

Démonstration. On pose $X = \{0\}$ et $\rho : \mathbb{R}^n \to X, y \to 0$. Soit
$$\begin{array}{cccc} H & : & \mathbb{R}^n \times [0,1] & \to & \mathbb{R}^n \\ & & (y,t) & \to & (1-t)y \end{array}$$
H est clairement continue, $H(y,0) = y,\ H(y,1) = 0 = \rho(y), H(0,t) = 0$
$\{0\}$ est donc un retract par déformation de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ est contractile

□

Proposition:
Si X est un retract par déformation de Y, alors l'inclusion $\iota : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Par définition, il existe $\rho : Y \to X$ une retraction par déformation. Il existe donc $H : Y \times [0,1] \to Y$ continue telle que :

$$\forall y \in Y,\ H(y,0) = y,\ H(y,1) = \rho(y) \in X,$$

$$\forall (x,t) \in X \times [0,1],\ H(x,t) = x.$$

En particulier $\iota \circ \rho \sim id_Y$, et on sait déja que $\rho \circ \iota = id_X$. □

1.3 Théorie des catégories

On veut associer à des espaces topologiques des invariants par homotopie. C'est-à-dire si on se donne deux espaces topoplogiques X, Y on veut leur associer des objets mathématiques α_X, α_Y tels que si X et Y sont homotopiquement équivalents, $\alpha_X = \alpha_Y$. On va associer une suite de modules. Pour formaliser cette "assocation" on utilise la théorie des catégories.

Définition:
Une catégorie $\mathcal{C}$ est une collection d'objets $ob(\mathcal{C})$ et des ensembles de morphismes $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ qui vérifient :

- $\exists$ $\begin{array}{ccc} \circ : Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \to & Mor_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (g,f) & \to & g \circ f \end{array}$ pour tous $X, Y, Z \in ob(\mathcal{C})$, associative.
- $\exists\ id_X \in Mor_{\mathcal{C}}(X,X)$ tel que $\forall X, Y \in ob(\mathcal{C}),\ \forall g \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y),\ id_X \circ g = g \circ id_X = g$.

Un isomorphisme dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un morphisme $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ tel que il existe $g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y,X)$ avec $f \circ g = id_X$ et $g \circ f = id_Y$.

les catégories qui nous intéressent sont les catégories des espaces topologiques Top, dont les morphismes sont les applications continues, et la catégorie des modules sur un anneau K, Mod_K, dont les morphimes sont les morphismes de K-modules. Les objets qui font les liens entre deux catégories sont les foncteurs.

Définition:
Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre deux catégories est la donnée :

$$F : \begin{array}{ccc} ob(\mathcal{C}) & \to & ob(\mathcal{D}) \\ X & \to & F(X) \end{array} \quad \textit{sur les objets,}$$

$$F : \begin{array}{ccc} Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) & \to & Mor_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) \\ f & \to & F(f) \end{array} \quad \textit{sur les morphismes,}$$

telle que $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ *et* $F(id_X) = id_{F(X)}$.

On définit la catégorie des paires d'espaces topologiques $pTop$ dont les objets sont (X,A), $X \in ob(Top)$, $A \subset X$ et dont les morphismes sont les applications $f : (X,A) \to (Y,B)$ continues telles que $f(A) \subset B$.

Chapitre 2

L'homologie

2.1 Définition

L'homologie est la donnée d'une suite de foncteurs

$$\begin{array}{rccc} H_n(-,K): & pTop & \to & Mod_K \\ & (X,A) & \to & H_n(X,A,K) \end{array}$$

et des transformations naturelles appellées connectants

$$\partial_* : H_{n+1}(X,A,K) \to H_n(A,\emptyset,K).$$

On note parfois $H_n(X,\emptyset,K) = H_n(X)$.

Définition:
La propriété de transformation naturelle des connectants signifie que pour tout morphisme de paires $f : (X,A) \to (Y,B)$ les connectants associés à (X,A) et (Y,B) et les morphismes induits par f en homologie donnent lieu à un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} H_{n+1}(X,A,K) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "H_{n+1}(f)"] & H_n(A,\emptyset,K) \arrow[d, "H_n(f_{|A})"] \\ H_{n+1}(Y,B,K) \arrow[r, "\partial_*"] & H_n(B,\emptyset,K). \end{tikzcd}$$

L'homologie doit vérifier cinq axiomes :

i Homotopie :

Si $f, g : (X,A) \to (Y,B)$ sont des morphismes de paires homotopes alors $H_n(f) = H_n(g)$.

ii Additivité :

Si $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ est une réunion disjointe de sous-espaces alors

$$H_n(\bigsqcup_\alpha X_\alpha) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$$

Où l'isomorphisme est induit par les inclusions $\iota_\alpha : X_\alpha \to X$.

iii Exactitude :

Pour chaque paire (X,A) on a une suite exacte longue :

$$\ldots \longrightarrow H_{n+1}(X,A,K) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A,\emptyset,K) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X,\emptyset,K) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A,K) \xrightarrow{\partial_*} \ldots \longrightarrow 0$$

où $\iota_* : H_n(A,\emptyset,K) \to H_n(X,\emptyset,K)$ est le morphisme induit par l'inclusion $\iota : (A,\emptyset) \to (X,\emptyset)$
et $j_* : H_n(X,\emptyset,K) \to H_n(X,A,K)$ est le morphisme induit par l'inclusion $j : (X,\emptyset) \to (X,A)$.

iv Excision :

Soit $U \subset A$ tel que $\overline{U} \subset \overset{\circ}{A}$ alors l'applicatioin d'inclusion de paires $k : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ induit un isomorphisme en homologie $H_n(k) : H_n(X \setminus U, A \setminus U, K) \tilde{\to} H_n(X, A, K)$.

v Dimension :

$H_n(x_0, \emptyset, K) = \left\{ \begin{array}{ll} K & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{array} \right.$.

Il y a de nombreuses constructions qui respectent ces axiomes. On peut montrer que toutes ces constructions sont équivalentes à isomorphisme près mais c'est hors de portée de ce mémoire. On peut citer par exemple l'homologie simpliciale ou bien l'homologie singulière que nous allons étudier plus en détail dans ce mémoire. En effet en admettant que toutes les homologies sont équivalentes, on peut donc se concentrer sur une théorie en particulière. Chaque théorie d'homologie présente ses aventages et ses inconvénients : généralement une théorie simple à définir rendra les calculs compliqués là ou les théories moins naturelles rendront les calculs plus simples. Pour ce mémoire nous allons définir l'homologie singulière qui est simple de par sa définition, et l'eventail d'espaces sur lesquels elle est définie. Il n'y a en effet pas besoins de contraintes sur l'espace topologique X auquel on va associer l'homologie. Avant de pourvoir la définir on va d'abord avoir besoin de faire des constructions algébriques et topologiques.

2.2 Les complexes de chaînes

Nous allons déjà construire les suites de K-modules qui nous intéressent puis nous construiront les foncteurs.

2.2.1 Définitions

Définition:
Un complexe de chaînes est un couple $(C_*, \partial_*) = C$ où C_* est une suite de K-modules $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ∂_* est une collection de morphismes de K-modules $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ telles que pour $n \geq 1$, $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.
On appel C_n la composante de degré n du complexe et ∂_n l'opérateur de bord de degré n.

on s'interesse à deux sous-modules des composantes C_n.

Définition:
on note
$Z_n(C) = \{c \in C_n \mid \partial_n(c) = 0\} \subset C_n$ les cycles,
$B_n(C) = \{c \in C_n \mid \exists c' \in C_{n+1},\ c = \partial_{n+1}(c')\} \subset C_n$ les bords.
Comme $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ on a $B_n(C) \subset C_n(C)$ on peut donc définir
$H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$ l'homologie de degré n de C. On note $\{z\}$ la classe de z dans $H_n(C)$.

Comme pour beaucoup d'objets mathématiques va ensuite vouloir créer des morphismes de complexes pour obtenir la catégorie des complexes de chaines de K-module $Ch(K)$.

Définition:
Un morphis :me de complexes de chaines $f : C \to D$ est une suite de morphismes de K-modules $f_n : C_n \to D_n$ telle que

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

commute.

2.2.2 Propriétés

Les morphismes de complexes nous donnent bien des morphismes en homologie comme nous l'indique la proposition suivante.

Proposition:
si f est un morphisme de complexes alors
$f_n(Z_n(C)) \subset Z_n(D)$,
$f_n(B_n(C)) \subset B_n(D)$.
On a donc $f_{*n} : H_n(C) \to H_n(D)$ bien définit par $\{f_n(z)\} = f_{*n}(\{z\})$.

Démonstration. Soit $z \in Z_n(C)$, $\partial(f_n(z)) = f_{n-1}(\partial(z)) = f_{n-1}(0) = 0$ car f_{n-1} morphisme de modules. $f_n(z) \in Z_n(D)$. Soit $b \in B_n(C)$ il existe $b' \in C_{n+1}$ tel que $b = \partial(b')$, $f_n(b) = f_n(\partial(b')) = \partial(f_{n+1}(b'))$. $f_n(b) \in B_n(D)$.
Soit $y, z \in Z_n(C)$ tel que $\{z\} = \{y\}$, c'est à dire $z - y \in B_n(C)$. On a donc $f_n(z - y) \in B_n(D)$ comme f_n est un morphisme de modules, $f_n(z) - f_n(y) \in B_n(D)$, $\{f_n(z)\} = \{f_n(y)\}$. f_{*n} est bien définie. □

Il nous reste une dernière construction à réaliser : les suites exactes courtes de complexes.

Définition:
Une suite exacte courte de complexe est une suite

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \longrightarrow 0$$

qui forme une suite exacte courte de K-modules en tout degré

$$0 \longrightarrow C'_n \xrightarrow{i} C_n \xrightarrow{p} C''_n \longrightarrow 0\ .$$

On peut désormais énoncer un resultat sur les complexes de chaines.

Théorème 2.1. *Les morphismes induits par les morphismes d'une suite exacte courte de complexes s'insèrent dans une suite exacte longue en homologie.*

$$\ldots \longrightarrow H_n(C') \xrightarrow{i_*} H_n(C) \xrightarrow{p_*} H_n(C'') \xrightarrow{\partial_*}$$

$$\xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C') \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(C) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(C'') \xrightarrow{\partial_*}$$

$$\xrightarrow{\partial_*} H_0(C') \xrightarrow{i_*} H_0(C) \xrightarrow{p_*} H_0(C'') \longrightarrow 0$$

pour une certaine famille de morphismes $\partial_* : H_{n+1}(C'') \to H_n(C')$ appelés connectants de la suite exacte.

Démonstration. On veut définir le connectant δ_*. On veut associer à un élément $\{z\} \in H_n(C'')$ un élément

$\{z'\} \in H_{n-1}(C')$. On a le digramme exacte suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & C_{n+1} \arrow[r, "p"] \arrow[d] & C''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "i"] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "p"] \arrow[d] & C''_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1}i \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r, "p"] \arrow[d] & C''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{tikzcd}$$

Soit $z \in Z_{n+1}(C'')$ un cycle. $\partial(z) = 0$. Par l'éxactitude de la suite, p est surjective donc il existe $x \in C_{n+1}$ tel que $p(x) = z$. Comme le diagramme commute $p(\partial(x)) = \partial(z) = 0$. Ainsi $\partial(x) \in ker(p) = Im(i)$. Il existe donc $z' \in C'_n$ tel que $i(z') = \partial(x)$. i est injective par l'exactitude de la suite. Comme le diagramme commute on a $i(\partial(z')) = \partial(\partial(x)) = 0$ car $\partial^2 = 0$. Finalement $\partial(z') \in ker(i) = \{0\},\ \partial(z') = 0,\ z' \in Z_n(C')$.
On pose $\partial_*(\{z\}) = \{z'\}$. Voyons que ∂_* est bien défini, c'est dire qu'il ne dépend pas du choix de x ni du représentant de $\{z\}$.
Soit z représentant de $\{z\}$, soit $x_1,\ x_2$ tels que $p(x_1) = p(x_2) = z$. Soient $z'_1,\ z'_2$ tels que $i(z'_1) = x_1,\ i(z'_2) = x_2 . x_1 - x_2 \in ker(p) = Im(i)$ donc, soit $\alpha \in C'_{n+1}$ tel que $i(\alpha) = x_1 - x_2$. On a

$$i(z'_1 - z'_2) = \partial(x_1 - x_2) = \partial(i(\alpha)) = i(\partial(\alpha)).$$

Comme i est injective, on en déduit $z'_1 - z'_2 = \partial(\alpha) \in B_n(C')$, d'où $\{z'_1\} = \{z'_2\}$.
Soient maintenant $\{z_1\} = \{z_2\},\ z_1 - z_2 \in B_{n+1}(C'')$ donc il existe $\alpha \in C_{n+2}(C''),\ \partial(\alpha) = z_1 - z_2$. Soient $a \in C_{n+2}$ tel que $p(a) = \alpha,\ x_1, x_2 \in C_{n+1}$ tels que $p(x_1) = z_1,\ p(x_2) = z_2$. On a vu que le choix de x n'avait pas d'impact une fois le représentant fixé. Soient $z'_1, z'_2 \in C'_n$ tels que $i(z'_1) = \partial(x_1),\ i(z'_2) = \partial(x_2)$. On a $p(\partial(a)) = \partial(p(a)) = \partial(\alpha) = z_1 - z_2$, donc $p(x_1 - x_2 - \partial(a)) = p(x_1) - p(x_2) - p(\partial(a)) = z_1 - z_2 - (z_1 - z_2) = 0$. $x_1 - x_2 - \partial(a) \in ker(p) = Im(i)$, soit donc β tel que $i(\beta) = x_1 - x_2 - \partial(a)$. On a

$$i(\partial(\beta)) = \partial(i(\beta) = \partial(x_1 - x_2 - \partial(a)) = \partial(x_1) - \partial(x_2) - \partial^2(a) = \partial(x_1 - x_2) = i(z'_1 - z'_2).$$

Comme i est injective $z'_1 - z'_2 = \partial(\beta) \in B_n(C')$ d'où $\{z'_1\} = \{z'_2\}$
∂_* ne dépend ni du choix de x ni du choix du représentant.
Il ne reste plus qu'à voir l'exactitude du complexe.
$p_* \circ i_* = (p \circ i)_* = 0_* = 0$ Soit $\{z\} \in H_{n+1}(C),\ \partial_*(p_*(\{z\}) = \partial_*(\{p(z)\})$. On cherche l'unique z' tel que $i(z') = \partial(z) = 0,\ z' = 0$. $\partial_*(p(\{z\})) = 0$ En reprenant les notations de la construction précédente :
$i_*(\partial_*(\{z\})) = \{i(z')\} = \{\partial(x)\} = 0$.
La suite est exacte.

□

On a fait les constructions dont on avait besoin du côté des modules, on doit maintenant faire des constructions du côté des espaces Topologiques

2.3 Le complexe singulier

Définition:
Le $n - simplexe$ Δ^n est l'espace $\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0 + \cdots + t_n = 1,\ 0 \leq t_i \leq 1\}$ ou de façon équivalente l'enveloppe convexe de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ où $v_i = (0_1, \ldots, 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1}, \ldots, 0_n)$ sont les sommets de Δ^n.

On définit des applications de cofaces
$d^i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ pour $i = 0, \dots, n$ telles que
$d^i(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$.

Les d^i sont des applications affines, elles sont donc déterminées par leur action sur les sommets de Δ^n.

Proposition:
On a la relation (les composées sont implicites) :

$$d^j d^i = d^i d^{j-1},\ \forall i < j.$$

Démonstration. Soient $i < j$

$$d^j d^i(t_0, \dots, t_{n-2}) = d^j(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-2}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, \dots, t_{n-2})$$

En effet, après avoir appliqué d^i, la coordonée t_{j-1} se trouve en $j-$ème position.

$$d^i d^{j-1}(t_0, \dots, t_{n-2}) = d^i(t_0, \dots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, \dots, t_{n-2}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, \dots, t_{n-2}).$$

On a bien $d^j d^i = d^i d^{j-1}$. □

Définition:
Soit X un espace topologique, on considère $Mor_{Top}(\Delta^n, X) = \{\sigma : \Delta^n \to X \textit{ continues}\}$. On appelle $n - \textit{simplexes dans } X$ les éléments de cet ensemble.
On a là aussi des opérateurs de faces :

$$\begin{array}{lcl} d_i \quad : Mor_{Top}(\Delta^n, X) & \to & Mor_{Top}(\Delta^{n-1}, X) \\ (\ \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X\ ) & \to & (\ \Delta^{n-1} \xrightarrow{d^i} \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X\ ) \end{array}$$

"On restreint σ à la i-ème face de Δ^n".

Proposition:
On a la relation (les composées sont implicites) :

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i\ \forall i < j.$$

Démonstration.

$$d_i d_j(\sigma) = d_i(\sigma \circ d^j) = \sigma \circ d^j d^i = \sigma \circ d^i d^{j-1} = d_{j-1}(\sigma \circ d_i) = d_{j-1} d_i(\sigma).$$

□

Nous allons maintenant pouvoir construire l'homologie singulière d'un espace.

Définition:
Le complexe singulier de X à coefficients dans K un anneau est le complexe de K-module $(S_*(X, K), \delta)$ tel que

$$S_n(X, K) = K[Mor_{top}(\Delta^n, X)] = \bigoplus_{\sigma \in Mor_{Top}(\Delta^n, X)} K[\sigma : \Delta^n \to X]$$

$$\delta([\sigma : \Delta^n \to X]) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\sigma \circ d^i : \Delta^{n-1} \to X].$$

Proposition:
δ vérifie bien $\delta^2 = 0$ par la relation $d_i d_j = d_{j-1} d_i$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\delta^2(\sigma) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} [d_i d_j \sigma] \\
&= \sum_{0 \le i < j \le n} (-1)^{i+j} [d_i d_j \sigma] + \sum_{0 \le j \le i \le n-1} (-1)^{i+j} [d_i d_j \sigma] \\
&= \sum_{0 \le i < j \le n} (-1)^{i+j} [d_{j-1} d_i \sigma] + \sum_{0 \le j \le i \le n-1} (-1)^{i+j} [d_i d_j \sigma] \\
&= \sum_{0 \le i \le j \le n-1} (-1)^{i+j+1} [d_j d_i \sigma] + \sum_{0 \le j \le i \le n-1} (-1)^{i+j} [d_i d_j \sigma] \\
&= - \sum_{0 \le j \le i \le n-1} (-1)^{i+j} [d_i d_j \sigma] + \sum_{0 \le j \le i \le n-1} (-1)^{i+j} [d_i d_j \sigma] \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

2.4 L'homologie singulière

2.4.1 Définition

Définition:
L'homologie singulière de X à coefficienst dans K est l'homologie du complexe singulier associé à X, $H_n(X, K) := H_n(S_*(X, K), \delta)$.

Nous allons maintenant vérifier que cette construction est fonctorielle et vérifie les axiomes que nous nous somme fixés.

2.4.2 Fonctorialité

On a

$$\begin{array}{ccccc}
X & & S_*(X,K) & & H_n(X,K) \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\
Y & & S_*(Y,K) & & H_n(Y,K)
\end{array}$$

où $\tilde{f}([\sigma : \Delta^n \to X]) = [\ \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y\ ] = [f \circ \sigma]$.

Proposition:
$\tilde{f}([\sigma : \Delta^n \to X]) = [\ \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y\ ] = [f \circ \sigma]$ est un morphisme de complexes.

Démonstration. $\tilde{f}_n$ est défini par son action sur la base de $S_n(X, K)$, $\{[\sigma] | \sigma \in Mor_{Top}(\Delta^n, X)\}$ et $\tilde{f}_n([\sigma]) = [f \circ \sigma]$ est un élément de la base de $S_n(Y, K)$. En effet $f \circ \sigma \in Mor_{Top}(\Delta^n, Y)$. $\tilde{f}_n$ est bien un morphisme de $K-$modules en tout degré. Aussi

$$\begin{aligned}
\delta \circ \tilde{f}([\sigma]) &= \delta[f \circ \sigma] \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i [f \circ \sigma] \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [f \circ \sigma \circ d^i] \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \tilde{f}([\sigma \circ d^i]) \\
&= \tilde{f}\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i [\sigma] \right) \\
&= \tilde{f} \circ \delta([\sigma])
\end{aligned}$$

□

Comme $\tilde{f}$ est un morphisme de complexe il induit un morphisme f_* en homologie.

Proposition:
$f \to f_*$ est un foncteur.

Démonstration. Soit $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ continues

$$\begin{aligned}
g_* \circ f_*(\{[\sigma]\}) &= g_*(\{[f \circ \sigma]\}) \\
&= \{[g \circ f \circ \sigma]\} \\
&= \{g \circ f[\sigma]\} \\
&= (g \circ f)_* \{[\sigma]\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
id_{X*}(\{[\sigma]\}) &= \{[id_X \circ \sigma]\} \\
&= \{[\sigma]\} \\
&= id_{H_n(X)}(\{[\sigma]\})
\end{aligned}$$

On a bien $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ et $id_{X*} = id_{H_n(X)}$

□

2.4.3 Exactitude

On se donne (X, A), $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} X$ une paire, on a :

$$\begin{array}{cccc}
\tilde{\iota} \ : & K[Mor_{Top}(\Delta^n, A)] & \to & K[Mor_{Top}(\Delta^n, X)] \\
& S_n(A, K) & \to & S_n(X, K) \\
& [\sigma : \Delta^n \to A] & \to & [\iota \circ \sigma : \Delta^n \to X]
\end{array}$$

$\tilde{\iota}$ est injective, on identifie $S_*(A, K)$ à un sous-complexe de $S_*(X, K)$.

Définition:
On définit $S_n(X, A, K) := S_n(X, K)/S_n(A, K)$ et on munit ces modules de la différentielle induite. On associe ainsi le complexe singulier $S_*(X, A, K)$ à la paire (X, A).

Par construction on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow S_*(A, K) \xrightarrow{\iota} S_*(X, K) \xrightarrow{q} S_*(X, K)/S_*(A, K) \longrightarrow 0$$

avec q la surjection canonique. En homologie, cette suite exacte courte de complexes donne la suite exacte longue demandée par l'axiome *iii*).

2.4.4 Dimension

Proposition:
$H_n(x_0, K) = \left\{ \begin{array}{cc} K & si\ n = 0 \\ 0 & si\ n \geq 1 \end{array} \right.$
C'est-à-dire l'homologie singulière vérifie l'axiome de dimension v).

Démonstration. $Mor_{Top}(\Delta^n, x_0) = \left\{ \begin{array}{cccc} cst_n : & \Delta^n & \to & x_0 \\ & p & \to & x_0 \end{array} \right\}$ n'est composé que d'un élément, donc

$S_n(x_0, K) = K\ [cst_n : \Delta^n \to x_0]\ \cong\ K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \delta\ [cst_n : \Delta^n \to x_0] &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i [cst] \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [cst \circ d^i] \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [cst] \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & si\ n\ impair \\ [cst_{n-1} : \Delta^{n-1} \to x_0] & si\ n \geq 2\ pair \end{array} \right. \end{aligned}$$

On a donc la suite

$$\ldots \xrightarrow{0} K[cst_2 : \Delta^2 \to x_0] \xrightarrow{id} K[cst_1 : \Delta^1 \to x_0] \xrightarrow{0} K[cst_0 : \Delta^0 \to x_0] \longrightarrow 0$$

On en déduit

$$\left. \begin{array}{r} Z_0(x_0, K) = S_0(x_0, K) = K \\ B_0(x_0, K) = 0 \end{array} \right\} H_0(x_0, K) = K$$

si n impair

$$\left. \begin{array}{l} Z_n(x_0, K) = ker(\ K \xrightarrow{0} K\ ) = K \\ B_n(x_0, K) = Im(\ K \xrightarrow{id} K\ ) = K \end{array} \right\} H_n(x_0, K) = 0$$

si n pair

$$\left. \begin{array}{l} Z_n(x_0, K) = ker(\ K \xrightarrow{id} K\ ) = 0 \\ B_n(x_0, K) = Im(\ K \xrightarrow{0} K\ ) = 0 \end{array} \right\} H_n(x_0, K) = 0$$

□

Proposition:
$H_0(X)$ est le $K-$module libre engendré par les composantes connexes par arc de X :

$$H_0 = K[\Pi_0 X],$$

où $\Pi_0 X = X/_\sim$ avec $x \sim y$ si x et y sont reliés par un arc.

Démonstration. On a $\Delta^0 = \{1\}$, $S_0(X, K) = K[\sigma : \Delta^0 = \{1\} \to X]$ ainsi on peut noter

$$\{\sigma : \Delta^0 = \{1\} \to X\} = \{\sigma_x : 1 \to x |\ x \in X\} \cong X$$

donc $S_0(X,K)=K[X]$.
On a $\Delta^1=[0,1],\ S_1(X,K)=K[\sigma:\Delta^1=[0,1]\to X]$ ainsi $\{\sigma:\Delta^1=[0,1]\to X\}$ est l'ensemble des arcs de X.

$$\delta[\sigma:\Delta^1\to X]=\left[\begin{array}{ccccc}\{x_0\} & \stackrel{d_0}{\to} & [0,1] & \stackrel{\sigma}{\to} & X\\ x_0 & \to & 1 & \to & \sigma(1)\end{array}\right]-\left[\begin{array}{ccccc}\{x_0\} & \stackrel{d_1}{\to} & [0,1] & \stackrel{\sigma}{\to} & X\\ x_0 & \to & 0 & \to & \sigma(0)\end{array}\right].$$

finalement on a :

$$S_0(X,K)=K[X]=\bigoplus_{x\in X}K[x],$$
$$S_1(X,K)=K[X]=\bigoplus_{\gamma:[0,1]\to X}K[\gamma],$$
$$\delta[\gamma]=[\gamma(1)]-[\gamma(0)].$$

Ainsi deux points $[x_0],\ [x_1]\in S_0(X,K)=Z_0(X,K)$ définissent la même classe en homologie si et seulement si il existe $\gamma:[0,1]\to X$ tel que $[x_1]-[x_0]=\delta[\gamma]$, si et seulement si $\gamma(1)=x_1,\ \gamma(0)=x_0$ et donc si et seulement si x_0 et x_1 sont dans une même composante connexe par arc. □

2.4.5 Additivité

Voyons que l'homologie singulière vérifie l'axiome d'additivité.

Définition:
La somme directe des complexes $(C_*,\delta_C),\ (D_*,\delta_D)$, $C\oplus D=(C_*\oplus D_*,\delta_{C\oplus D})$ est définie par :
$(C\oplus D)_n=C_n\oplus D_n$

$$\delta_{C\oplus D}=\begin{array}{ccccc}\delta_C\oplus\delta_D & : & C_n\oplus D_n & \to & C_{n-1}\oplus Dn-1\\ & & (x,y) & \to & (\delta_C(x),\delta_D(y))\end{array}$$

On a $Z_n(C\oplus D)=Z_n(C)\oplus Z_n(D)$,
$B_n(C\oplus D)=B_n(C)\oplus B_n(D)$,
$H_n(C\oplus D)\cong H_n(C)\oplus H_n(D)$.

Proposition:
Si $X=\bigsqcup_\alpha X_\alpha$ alors $H_n(X)\cong\bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.

Démonstration. On a $\sigma:\Delta^n\to\bigsqcup_\alpha X_\alpha$. Comme Δ^n est connexe, il existe α_0 tel que $Im(\sigma)\subset X_{\alpha_0}$. On a donc

$$Mor_{Top}(\Delta^n,\bigsqcup_\alpha X_\alpha)=\bigsqcup_\alpha Mor_{Top}(\Delta^n,X_\alpha)$$

, d'où

$$K[Mor_{Top}(\Delta^n,\bigsqcup_\alpha X_\alpha)]=\bigoplus_\alpha K[Mor_{Top}(\Delta^n,X_\alpha)]$$
$$S_n(X,K)=\bigoplus_\alpha S_n(X_\alpha,K).$$

De plus comme $\sigma(\Delta^n)\subset X_{\alpha_0},\ \sigma\circ d^{i-1}(\Delta^{n-1})\subset X_{\alpha_0}$. Ainsi $[\sigma]\in S_n(X_\alpha,K)\implies\delta[\sigma]\in S_{n-1}(X_\alpha,K)$. On a donc

$$S_*(X,K)=\bigoplus_\alpha S_*(X_\alpha,K),$$
$$H_*(X,K)=\bigoplus_\alpha H_*(X_\alpha,K).$$

□

2.4.6 Homotopie

Voyons maintenant l'axiome d'homotopie.
Soient $f, g : X \to Y,\ f_*, g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ on veut $f \sim g \implies f_* = g_*$.

Définition:
$f, g : (C_*, \delta) \to (D_*, \delta)$ sont homotopes, $f \sim g$, s'il existe $h_n : C_n \to D_{n+1}$, $n \geq -1$ avec $C_{-1} = \{0\}$ telle que

$$f_n - g_n = \delta_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \delta.$$

on représente par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, "f_n - g_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Proposition:
Si $f \sim g$ alors $f_* = g_*$.

Démonstration. Soit $z \in Z_n(C),\ f_*(\{z\}) = \{f(z)\},\ g_*(\{z\}) = \{g(z)\}$. Comme $z \in Z_n(C),\ \delta_n^C(z) = 0$

$$\begin{aligned} f_n(z) - g_n(z) &= \delta_{n+1}^D(h_n(z)) + h_{n-1}(\delta_n^C(z)) \\ &= \delta_{n+1}^D(h_n(z)) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{gathered} f_*(\{z\}) = \{f(z)\} = \{g(z)\} = g_*(\{z\}) \\ f_* = g_* \end{gathered}$$

□

Théorème 2.2. *Soient $f, g : X \to Y,\ \tilde{f}, \tilde{g} : S_n(X, K) \to S_n(Y, K)$ les morphismes de complexes associés. Si $f \sim g$ alors $\tilde{f} \sim \tilde{g}$*

Démonstration. Soient $f \sim g : X \to Y,\ H : X \times [0, 1] \to Y$ qui réalise l'homotopie. On considère

$$\Delta^n \times [0, 1] \xrightarrow{\sigma \times id} X \times [0, 1] \xrightarrow{h} Y$$

On va donc étuder le prisme $\Delta^n \times [0, 1]$. On va donner une autre expression du simplexe :

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | t_0 + \dots + t_n = 1\} \cong \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}$$

par l'homéomorphisme $x_i = t_0 + \dots + t_{-1}$ On ecrit alors

$$\Delta^n \times [0, 1] = \{(x_1, \dots, x_n, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, 1] | 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}$$

pour $s \in [0, 1]$ il existe $0 \leq 1 \leq n$ avec $x_0 = 0,\ x_{n+1} = 1$ tel que $x_i \leq s \leq x_{i+1}$. On décompose ainsi

$$\Delta^n \times [0, 1] = \{0 \leq s \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\} \cup \dots \cup \{0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq s \leq 1\}$$

on pose $\begin{array}{cccc} j_k & : & \Delta^{n+1} & \to & \Delta^n \times [0,1] \\ & & (0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1) & \to & (0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{k-1} \leq x_{k+1} \leq \cdots \leq x_n \leq 1, x_k) \end{array}$

On a alors

$$\Delta^n \times [0,1] \cong \bigcup_{k=0}^{n} j_k(\Delta^{n+1})$$

On a décomposé le prisme en $n+1$ $n+1-$simplexes Dans cette représentation,

$$\begin{array}{cccc} d^i & : & \Delta^{n-1} & \to & \Delta^n \\ & & (0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 1) & \to & (0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_n \leq 1) \end{array}$$

avec $y_k = \begin{cases} x_k & k \leq i \\ x_{k-1} & k \geq i+1 \end{cases}$

On peut réécrire :

$$d^0(0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 1) = (0 = y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq 1)$$
$$d^i(0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 1) = (0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_i = y_{i+1} \leq \cdots \leq y_n \leq 1)$$
$$d^n(0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 1) = (0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n = 1)$$

Pour $\sigma : \Delta^n \to X$, On pose

$$\tilde{h}[\sigma] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k [\ \Delta^{n+1} \xrightarrow{j_k} \Delta^n \times [0,1] \xrightarrow{\sigma \times id} X \times [0,1] \xrightarrow{h} Y\ ]$$

On note $h_k[\sigma] = [\ \Delta^{n+1} \xrightarrow{j_k} \Delta^n \times [0,1] \xrightarrow{\sigma \times id} X \times [0,1] \xrightarrow{h} Y\ ]$ On a :

$$\begin{aligned} d_0 h_0[\sigma] &= [(h \circ \sigma \times id \circ j_0) \circ d^0] = [h \circ (\sigma \times \{0\})] = [f \circ \sigma] \\ d_{n+1} h_n[\sigma] &= [(h \circ \sigma \times id \circ j_n) \circ d^{n+1}] = [h \circ (\sigma \times \{1\})] = [g \circ \sigma] \\ d_{j+1} h_j[\sigma] &= d_{j+1} h_{j+1}[\sigma] \\ d_i h_j &= h_{j-1} d_i[\sigma],\ i < j \\ d_i h_j &= h_j d_{i-1}[\sigma]\ i > j+1 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \delta_* \tilde{h}[\sigma] &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^k d_k \tilde{h}[\sigma] \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} d_i h_j[\sigma] \\ &= \tilde{f}[\sigma] - \tilde{g}[\sigma] + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} d_i h_j[\sigma] + \sum_{n+1 \geq i > j+1 \geq 1} (-1)^{i+j} d_i h_j[\sigma] \\ &+ \sum_{1 \leq i = j} (-1)^{i+j} d_j h_j[\sigma] + \sum_{i = j+1 \leq n+1} (-1)^{i+j} d_{j+1} h_j[\sigma] \\ &= \tilde{f}[\sigma] - \tilde{g}[\sigma] + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} h_{j-1} d_i[\sigma] + \sum_{i > j+1} (-1)^{i+j} h_j d_{i-1}[\sigma] \\ &+ \sum_{0 \leq i = j} (-1)^{2j} d_j h_j[\sigma] + \sum_{i = j+1 \leq n+1} (-1)^{2j+1} d_{j+1} h_{j+1}[\sigma] \\ &= \tilde{f}[\sigma] - \tilde{g}[\sigma] + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} h_{j-1} d_i[\sigma] + \sum_{i > j+1} (-1)^{i+j} h_j d_{i-1}[\sigma] \\ &+ \sum_{1 \leq i = j} (-1)^{2j} d_j h_j[\sigma] - \sum_{1 \leq i = j} (-1)^{2j} d_j h_j[\sigma] \\ &= \tilde{f}[\sigma] - \tilde{g}[\sigma] - \tilde{h}\delta_*[\sigma] \end{aligned}$$

On a bien $\delta_* \tilde{h} + \tilde{h}\delta_* = \tilde{f} - \tilde{g}$, $\tilde{f} \sim \tilde{g}$.

□

2.4.7 Théorème de Mayer-Vietoris

L'homologie singulière vérifie bien l'axiome d'homotopie. Il ne nous reste plus qu'à démontrer la propriété de Mayer-Vietoris qui conclura cette partie. Pour démontrer le théorème de Mayer-Vietoris nous allons utiliser le théorème des chaines U-petites que nous allons admettre.

Définition:
Soit X Un espace topologique, $U = \{A_\alpha \subset X\}_\alpha$ tel que $X = \bigcup_\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha$. On définit la chaine U-petite $S_n^U(X,K) \subset S_n(X,K)$ le sous-module engendré par les simplexes $\sigma : \Delta^n \to X$ tels que il existe $\alpha_0,\ \sigma(\Delta^n) \subset A_{\alpha_0}$.
On a $\sigma(\Delta^n) \subset A_{\alpha_0} \implies \sigma \circ d^i(\Delta^{n-1}) \subset A_{\alpha_0}$ donc $[\sigma] \in S_n^U(X,K) \implies \delta([\sigma]) = \sum_{i=0}^n (-1)^i[\sigma \circ d^i] \in S_{n-1}^U(X,K)$.
Ainsi le complexe de chaines U-petites forme un sous-complexe de $S_*(X,K)$. On le note $S_*^U(X,K)$.

Théorème 2.3. *L'application d'inclusion $\iota : S_*^U(X,K) \to S_*(X,K)$ possède un inverse à homotopie de complexe de chaines près et donc induit un isomorphisme en homologie :*

$$\iota_* : H_*(S_*^U(X,K)) \xrightarrow{\sim} H_*(S_*(X,K)).$$

Théorème 2.4. *Soit X un espace topologique, $A, B \subset X$ tels que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$. on note*
$A \cap B \overset{k}{\hookrightarrow} A,\ A \cap B \overset{l}{\hookrightarrow} B$
$A \overset{i}{\hookrightarrow} A \cup B,\ B \overset{j}{\hookrightarrow} A \cup B$ *On a une suite exacte longue*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_{n+1}(X) \arrow[r, "\delta_*"] & H_n(A \cap B) \arrow[r, "\begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}"] & H_n(A) \oplus H_n(B) \arrow[r, "(i_*, j_*)"] & H_n(X) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

$$c \longrightarrow (k_*(c), -l_*(c)) \longrightarrow (i_*(k_*(c)) + j_*(l_*(c)))$$

Démonstration. On applique le théorème des chaines $U-$petites à $U = \{A, B\}$.

$$S_n^U(X) = K[\sigma : \Delta^n \to X | \sigma(\Delta^n) \subset A \ ou\ \sigma(\Delta^n) \subset B]$$

$S_n^U(X) = Im((i_*, j_*) : S_n(A) \oplus S_n(B) \to S_n(X),\ (x,y) \to x + y)$.
En effet soit $(x,y) \in S_n(A) \oplus S_n(B)$. Si $x \neq y,\ x + y \in S_n^U(X)$. Si $x = y,\ x + x = (1+1)x \in S_n^U(X)$. $Im((i_*, j_*) \subset S_n^U(X)$.
D'autre part, soit $x \in S_n^U(X),\ x = (i_*, j_*)(x, 0)$. $Im((i_*, j_*) = S_n^U(X)$.
On a $ker(i_*, j_*) = \{(c, -c) \in S_n(A) \oplus S_n(B) | c \in S_n(A) \cap S_n(B)\}$
Aussi

$$S_n(A \cap B) = K[\sigma : \Delta^n \to X | \sigma(\Delta^n) \subset A \cap B] = S_n(A \cap B)$$

On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow S_*(A \cap B)0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}} S_*(A) \oplus S_*(B) \xrightarrow{(i_*, j_*)} S_*(A) \oplus S_*(B) = S_*^U(X) \subset S_*(X) \longrightarrow 0$$

qui donne la suite exacte longue de Mayer-Vietoris en homologie. ☐

On va pouvoir utiliser le théorème de Mayer-Vietoris pour calculer l'homologie des sphères.

2.5 L'homologie des sphères

On commence par calculer $H_k(\mathbb{S}^1)$. On pose $n, s \in \mathbb{S}^1$ le pôle nord et le pôle sud.
On pose $A = \mathbb{S}^1 \setminus \{s\}, B = \mathbb{S}^1 \setminus \{n\}$. A et B sont homéomorphes à $\mathbb{R}$.
$A \cap B = \mathbb{S}^1 \setminus \{n, s\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$.
On a $H_*(A) \cong H_*(\mathbb{R}) \cong H_*(\{x_0\}) = \begin{cases} K, & n = 0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases}$.
De même pour B. Aussi $H_*(A \cap B) \cong H_*(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) \cong H_*(\{x_0\} \sqcup \{x_0\}) = \begin{cases} K \oplus K, & n = 0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases}$.
Comme $H_1(A) = H_1(B) = 0$, on a par Mayer-Vietoris la suite exacte :

$$0 \longleftarrow H_0(\mathbb{S}^1) \longleftarrow H_0(A) \oplus H_0(B) \xleftarrow{\begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}} H_0(A \cap B) \xleftarrow{\delta_*} H_1(\mathbb{S}^1) \longleftarrow 0 \ .$$

Par l'exactitude de la suite, δ_* est injective donc c'est un isomorphime de $H_1(\mathbb{S}^1)$ dans $ker \begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}$.
Si $[a] \in H_0(A \cap B)$,

$$\begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix} : \begin{array}{ccc} H_0(A \cap B) & \to & H_0(A) \oplus H_0(B) \\ [a] & \to & ([a], [-a]) \end{array}.$$

On en déduit la matrice
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}$ d'où $ker \begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix} \cong K$.

On a $H_1(\mathbb{S}^1) \cong ker \begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix} \cong K$.
Pour les autres indices, comme $H_k(A) = H_k(B) = H_k(A \cap B) = 0, k \geq 1$ la suite exacte de Mayer-Vietoris donne $0 \to H_n(\mathbb{S}^1) \to 0$ et donc par l'exactitude de la suite $H_n(\mathbb{S}^1) = 0$.

On peut maintenant établir

$$H_n(\mathbb{S}^m) = \begin{cases} K, & n = 0, m \\ 0, & sinon \end{cases}$$

par recurrence sur m, on a déjà vu le resultat pour $m = 1$, on suppose l'hypothèse vraie au rang $m - 1$.
On note S, N le pôle sud et le pôle nord de $\mathbb{S}^m$.
$A = \mathbb{S}^m \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^m,\ B = \mathbb{S}^m \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^m$.
$A \cap B = \mathbb{S}^m \setminus \{S, N\}$, $\mathbb{S}^{m-1}$ est un rétract par déformation de $\mathbb{S}^m \setminus \{S, N\}$ donc $H_n(A \cap B) = H_n(\mathbb{S}^{m-1}) = \begin{cases} K & n = 0,\ m-1 \\ 0 & sinon \end{cases}$.
On a $H_n(A) = H_n(B) = H_n(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} K & n = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$.

Par la suite exact de Mayer-Vietoris on a :

$H_{n-1}(A \cap B) \xleftarrow{\delta_*} H_n(\mathbb{S}^m) \leftarrow H_n(A) \oplus H_n(B)$. Il est clair que si $n \neq m, n > 1,\ H_n(A \cap B) = H_n(A) \oplus H_n(B) = 0$ donc $H_n(\mathbb{S}^m) = 0$.

En 0, $0 \to H_1(\mathbb{S}^m) \xrightarrow{\delta_*} H_0(A \cap B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}} H_0(A) \oplus H_0(B) \to H_0(\mathbb{S}^m) \to 0$. Par l'exactitude de la suite δ_* et un isomorphisme de $H_1(\mathbb{S}^m)$ vers $ker \begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}([a]) = ([a], -[a]) \neq (0,0)$ si $[a] \neq (0,0)$ donc $H_1(\mathbb{S}^m) \cong ker \begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix} = 0$.

$H_{m-1}(A) \oplus H_{m-1}(B) \leftarrow H_{m-1}(A \cap B) \xleftarrow{\delta_*} H_m(\mathbb{S}^m) \leftarrow H_m(A) \oplus H_m(B)$, or $H_{m-1}(A) \oplus H_{m-1}(B) = H_m(A) \oplus H_m(B) = 0$. Par l'exactitude de la suite δ_* est un isomorphisme donc $H_m(\mathbb{S}^m) \cong H_{m-1}(A \cap B) \cong K$.

Chapitre 3

Le théorème du sandwich au jambon

3.1 Le théorème de Borsuk-Ulam

On rappel l'énoncé :

Théorème 3.1. *Soit $n \geq 1$, pour toute fonction $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ continue, il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x) = f(-x)$*

On va avoir besoin pour le démontrer de la proposition suivante :

Proposition:
Soit $n \geq 0$ et $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ continue qui préserve les antipodes. Alors $f_* : H_n(\mathbb{S}) \to H_n(\mathbb{S})$ est un isomorphisme.

Démonstration. On considère $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$. Alors $f_{|\mathbb{S}^{n-1}}$ préserve encore les antipodes. On va raisonner par recurrence sur n.
Soit $f : \mathbb{S}^0 = \{-1, 1\} \to \mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ continue qui préserve les antipodes. Il n'existe que deux bijections de $\{-1, 1\}$ dans lui même et les deux préservent les antipodes : $g_1(1) = 1,\ g_1(-1) = -1$ et $g_{-1}(1) = -1,\ g_{-1}(-1) = 1$.
On a $H_0(\mathbb{S}^0) = K[-1] \oplus K[1]$. On a $g_{1*}[1] = [1],\ g_{1*}[-1] = [-1]$. g_{1*} induit une bijection sur la base de $H_0(\mathbb{S}^0)$ c'est donc bien un isomorphisme. On a $g_{-1*}[1] = [-1],\ g_{-1*}[-1] = [1]$. g_{-1*} induit une bijection sur la base de $H_0(\mathbb{S}^0)$ c'est donc aussi bien un isomorphisme.
Soit $n \geq 1$ Supposons que $f_{|\mathbb{S}^{n-1}}$ induise un isomorphisme en homologie.
Par la fonctorialité de la suite de Mayer-Vietoris, on a

$$\begin{tikzcd}
H_n(A) \oplus H_n(B) = 0 \arrow[r] & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(A \cap B) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(A) \oplus H_{n-1}(B) = 0 \\
0 \arrow[r] & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "\delta"] & H_{n-1}(A \cap B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Par l'exactitude de la suite, δ est un isomorphisme. Comme f_* est un morphisme de complexe, $\delta \circ f_* = f_* \circ \delta$. Aussi $H_{n-1}(A \cap B) \cong H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, D'où le carré commutatif.

$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_{|\mathbb{S}^{n-1}*}"] & H_{n-1}(A \cap B) \arrow[d, "f_*"] \\
H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(A \cap B)
\end{tikzcd}$$

Comme $f_{|\mathbb{S}^{n-1}}$ induit un isomorphisme en homologie, $f_* = i_*^{-1} \circ f_{|\mathbb{S}^{n-1}} \circ i_*$ est un isomorphisme sur $H_{n-1}(A \cap B)$. Comme δ est un isomorphisme, $f_* = \delta^{-1} \circ f_* \circ \delta$ est un isomorphisme. $\square$

On peut maintenant démontrer le théorème de Borsuk-Ulam.

Démonstration. Soit $n \geq 1$. On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ continue telle que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$. Soit $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ définie par :

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{||f(x) - f(-x)||}.$$

g est continue et $g(-x) = -g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$. Soit $\iota : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^n$ l'inclusion. $g \circ \iota : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$. On a $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} K & n \geq 2 \\ K^2 & n = 1 \end{cases}$ et $H_{n-1}(\mathbb{S}^n) = 0$.
On a donc $\iota_* : H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \to H_{n-1}(\mathbb{S}^n)$ n'est pas injective.
Ainsi $(g \circ \iota)_* = g_* \circ \iota_* : H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \to H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ n'est pas injective.
Or pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, $g \circ \iota(-x) = g(-x) = -g(x) = -g \circ \iota(x)$, $g \circ \iota$ préserve les antipodes. Par la proposition précédente : $(g \circ \iota)_*$ est un isomorphisme, contradiction. une telle application f ne peut pas exister. $\square$

3.2 Le théorème du sandwich au jambon

On rappel l'énoncé :

Théorème 3.2. *Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que $A_i \subset \mathbb{R}^n$ mesurable et borné. Il existe $x \in \mathbb{S}^n$, $t \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \lambda(A_i \cap P_{x,t}^+) = \lambda(A_i \cap P_{x,t}^-).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Soit $\phi_x : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ définie par

$$\phi_x(t) = \lambda(A_1 \cap P_{x,t}^-)$$

ϕ_x est croissante, en effet soit $t_0 < t_1$ alors $\{y \in A | \langle y|x \rangle \leq t_0\} \subset \{y \in A | \langle y|x \rangle \leq t_1\}$ donc

$$\begin{aligned}
\phi_x(t_0) &= \lambda(A_1 \cap P_{x,t_0}^-) \\
\phi_x(t_0) &= \lambda\{y \in A_1 | \langle y|x \rangle \leq t_0\} \\
\phi_x(t_0) &\leq \lambda\{y \in A_1 | \langle y|x \rangle \leq t_1\} \\
\phi_x(t_0) &\leq \phi_x(t_1).
\end{aligned}$$

De plus ϕ_x est continue. Soit $t \in \mathbb{R}$, soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ telle que $t_n \to t$ en croissant. Alors $(\{y \in A_1 | \langle y|x \rangle \leq t_n\})_n$ est une suite croissante d'ensembles. On a donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \phi_x(t_n) &= \lim_{n \to \infty} \lambda\{y \in A_1 | \langle y|x \rangle \leq t_n\} \\
&= \lambda\left(\bigcup_n \{y \in A_1 | \langle y|x \rangle \leq t_n\}\right) \\
&= \lambda\{y \in A_1 | \langle y|x \rangle \leq t\} \\
&= \phi_x(t).
\end{aligned}$$

Par le même raisonnement, soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{R}$ telle que $t_n \to t$ en décroissant. Alors $(\{y \in A_1 | \langle y|x \rangle \leq t_n\})_n$ est une suite décroissante d'ensembles. On a donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \phi_x(t_n) &= \lim_{n \to \infty} \lambda\{y \in A_1 | \langle y|x \rangle \leq t_n\} \\
&= \lambda\left(\bigcap_n \{y \in A_1 | \langle y|x \rangle \leq t_n\}\right) \\
&= \lambda\{y \in A_1 | \langle y|x \rangle \leq t\} \\
&= \phi_x(t).
\end{aligned}$$

ϕ_x est bien continue. On remarque que si $t < 0$ pour tout $\epsilon > 0$, $P^-_{x,t} \cap \{x \in \mathbb{R}^n | \; ||x|| \leq t - \epsilon\} = \emptyset$. Ainsi comme A_1 est borné, il existe $M > 0$ tel que $A_1 \subset \{x \in \mathbb{R}^n | \; ||x|| \leq M\}$. Pour tout $t < -M$, $A \cap P^-_{x,t} = \emptyset$ Donc on a

$$\lim_{t \to -\infty} \phi_x(t) = 0.$$

A l'inverse si $t > 0$ $P^-_{x,t} \cap \{x \in \mathbb{R}^n | \; ||x|| \leq t\} = \{x \in \mathbb{R}^n | \; ||x|| \leq t\}$. Ainsi comme A_1 est borné, il existe $M > 0$ tel que $A_1 \subset \{x \in \mathbb{R}^n | \; ||x|| \leq M\}$. Pour tout $t \geq M$, $A_1 \cap P^-_{x,t} = A_1$ Donc on a

$$\lim_{t \to \infty} \phi_x(t) = \lambda(A_1).$$

On en déduit qu'il existe deux nombre $\tau'(x)$ et $\tau''(x)$, $\tau'(x) \leq \tau''(x)$ tels que

$$\{t \in \mathbb{R} | \phi_x(t) = \frac{\lambda(A_1}{2}\} = [\tau'(x), \tau''(x)].$$

On remarque

$$\begin{aligned}
\tau'(-x) &= min\{t | \lambda\{A_1 \cap P^-_{-x,t}\} = \frac{\lambda(A_1)}{2}\} \\
&= min\{t | \lambda\{A_1 \cap P^+_{x,-t}\} = \frac{\lambda(A_1)}{2}\} \\
&= min\{t | \lambda(A_1) - \lambda\{A_1 \cap P^-_{x,-t}\} = \frac{\lambda(A_1)}{2}\} \\
&= min\{t | \lambda\{A_1 \cap P^-_{x,-t}\} = \frac{\lambda(A_1)}{2}\} \\
&= -max\{t | \lambda\{A_1 \cap P^-_{x,t}\} = \frac{\lambda(A_1)}{2}\} \\
&= -\tau''(x).
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\tau''(-x) &= max\{t | \lambda\{A_1 \cap P^-_{-x,t}\} = \frac{\lambda(A_1)}{2}\} \\
&= max\{t | \lambda\{A_1 \cap P^-_{x,-t}\} = \frac{\lambda(A_1)}{2}\} \\
&= -min\{t | \lambda\{A_1 \cap P^-_{x,t}\} = \frac{\lambda(A_1)}{2}\} \\
&= -\tau'(x).
\end{aligned}$$

Enfin, les fonction τ' et τ'' sont continues.
On pose

$$\tau(x) = \frac{\tau'(x) + \tau''(x)}{2}.$$

On a $\tau(-x) = -\tau(x)$ et $\lambda\{A_1 \cap P^-_{x,\tau(x)}\} = \phi_x(\tau(x)) = \frac{\lambda(A_1)}{2} = \lambda\{A_1 \cap P^+_{x,\tau(x)}\}$. Soit $\psi : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ définie par

$$\psi(x) = (\lambda\{A_2 \cap P^-_{x,\tau(x)}\}, \ldots, \lambda\{A_n \cap P^-_{x,\tau(x)}\}).$$

ψ est continue, donc par le théorème de Borsuk-Ulam, il exise $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ tel que $\psi(x_0) = \psi(-x_0)$. on en déduit pour tout $2 \leq i \leq n$

$$\lambda\{A_i \cap P^-_{x_0,\tau(x_0)}\} = \lambda\{A_i \cap P^-_{-x_0,\tau(-x_0)}\} = \lambda\{A_i \cap P^-_{-x_0,-\tau(x_0)}\} = \lambda\{A_i \cap P^+_{x_0,\tau(x_0)}\},$$

l'égalité $\lambda\{A_1 \cap P^-_{x_0,\tau(x_0)}\} = \lambda\{A_1 \cap P^+_{x_0,\tau(x_0)}\}$ étant déja établie.

□

Nous avons même démontrer un version un peu plus forte que le résultat annoncé en introduction : on peu séparer en deux un sandwich composé de n ingrédients en une seul coupe si ce sandwich est en dimension n. Malheureusment, pour trouver cette coupe il faudrait trouver les points antipodaux de la fonction ψ qui sont égaux. Or bien que le théorème de Borsuk-Ulam nou garanti leur existance, il ne nous donne aucun moyen de les trouver.

Bibliographie

[1] *Lille.pod.* Lille.pod - homologie et topologie. Récupéré en février 2023, à partir de `https://pod.univ-lille.fr/topologie-algebrique/homologie-topologie/`

[2] Henri Paul de Saint-Gervais (2014-2022). *Analysis Situs.* Analysis situs. Récupéré en avril 2023 à partir de `https://analysis-situs.math.cnrs.fr/index.html`