LIRE ATTENTIVEMENT : CONSIGNES POUR LES ÉTUDIANTS ET LES ÉTUDIANTES EN M1 PMG

Pour les mémoires de recherche en PMG, le travail demandé à l'étudiante, à l'étudiant ou au binôme sera la rédaction d'un rapport d'approximativement 15-25 pages écrit en Latex. Ce travail commencera début octobre et s'achèvera par le dépôt du manuscrit puis la soutenance orale vers le mois d'avril (dates à préciser ultérieurement). Pour les étudiants seuls, la soutenance durera de 15 à 20 minutes et sera suivie par 10 minutes de questions. Pour les binômes, la soutenance durera de 20 à 25 minutes et sera suivie par 20 minutes de questions. Les étudiantes et les étudiants devront montrer qu'ils maîtrisent les concepts mathématiques de leur mémoire.

Un titre, un résumé, des références et le nom du responsable sont donnés pour chaque sujet. N'hésitez pas à contacter le responsable d'un projet afin d'avoir des idées plus précises sur le travail attendu.

CHOIX DU SUJET

Avant le dimanche premier octobre à 23h59 vous devez envoyer un message par courriel au responsable des mémoires en précisant :
— Les membres du binôme (si vous êtes plusieurs).
— Une liste de trois sujets classés par ordre de préférence.

Au cas où un sujet serait classé plusieurs fois premiers, la rencontre entre les étudiants et le responsable du projet sera prise en compte pour départager les candidats. Une médiation pourra être également envisagée (par exemple une solution peut-être la création d'un binôme pour deux étudiants intéressés par un même sujet). Si vous avez des questions n'hésitez pas à me contacter par courriel ou à venir me voir.

RESPONSABLE

Patrick Tardivel, bureau A320, patrick.tardivel@u-bourgogne.fr.

SUJET 1 . **Problème du mot et automates.**

RÉSUMÉ : Ce sujet est à la croisé de l'algorithmique et de la théorie des groupes. On part d'un ensemble fini A qui s'appelle un alphabet. Une suite finie d'éléments de A s'appelle un mot en A. Un langage est un ensemble de mots et l'algorithmique est l'étude des langages. Un lien important entre l'algorithmique et la théorie des groupes se fait comme suit. On se donne un groupe G et on suppose qu'il existe une partie finie $S \subset G$ qui engendre G. On pause $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$ et $A = S \cup S^{-1}$. Alors tout élément g de G peut s'écrire sous la forme $g = a_1 a_2 \cdots a_p$ avec $a_i \in A$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. On dit alors que g est représenté par le mot $w = (a_1, a_2, \dots, a_p)$. Un tel mot w n'est généralement pas unique, aussi nous aimerions savoir quand deux mots w et w' représentent le même élément de G. Un algorithme qui, étant donnés deux mots w et w', détermine s'il représentent le même élément de G ou non et une solution au problème du mot dans G. Après, il y a algorithme et algorithme, les algorithmes les plus rapides et et les plus économiques en termes de mémoire

RESPONSABLE : Luis Paris

SUJET 2 . **Dynamique complexe.**

RÉSUMÉ : Dans sa forme la plus simple, la *dynamique complexe* consiste à étudier les systèmes dynamiques induits par polynôme d'une variable complexe. Bien que d'apparence très simple, ces systèmes sont très riches (faisant entre autre apparaître les fractales que sont les *ensembles de Julia* et l'*ensemble de Mandelbrot*. Le but du mémoire est d'étudier les premières propriétés de ces objets, avec des techniques venant aussi bien de la topologie, de l'analyse complexe ou des équations différentielles.

RÉFÉRENCE(S) :

(1) "Complex Dynamics", Livre de Lennart Carleson et Theodore W. Gamelin.
(Disponible sur demande au format pdf.)

RESPONSABLE : Johan Taflin

SUJET 3 . **Points rationnels d'une courbe elliptique.**

Résumé : Une *courbe elliptique* est une courbe définie dans $\mathbb{C}^2$ par un polynôme de degré trois (par exemple $y^2 = x^3+3x^2+5$). Il s'avère que les courbes elliptiques jouent un rôle central dans plusieurs branches des mathématiques : cryptographie, géométrie algébrique, théorie des nombres, etc.
Le but de ce mémoire est d'étudier les *points rationnels* d'une courbe elliptique E, c'est-à-dire l'ensemble $E(\mathbb{Q})$ des couples de points $(x, y) \in E$ dont les coordonnées sont deux nombres rationnels. Le stage consisterait à étudier quelques exemples de courbes elliptiques et à comprendre la preuve du fameux théorème de Mordell qui affirme que l'ensemble $E(\mathbb{Q})$, qui est naturellement muni d'une structure de groupe abélien, est un groupe finiment engendré.

Référence(s) :

(1) "Rational Points on Elliptic Curves", Livre de John Tate et Joseph H. Silverman.
(Disponible sur demande au format pdf.)

Responsable : Johan Taflin

SUJET 4 . **Groupe libre et actions sur les arbres.**

Résumé : Étant donné un entier r le groupe libre de rang r est le plus "grand" groupe engendré par r éléments. On peut les caractériser de manière algébrique grâce à une propriété universelle. On peut aussi les étudier par le biais de la géométrie : les groupes libres sont en effet les seuls groupes pouvant agir sans point fixe sur un arbre simplicial. Le but de ce mémoire est d'explorer ce lien très fécond entre algèbre et géométrie. Il permet notamment d'étudier la structure des groupes libres (quels sont par exemple les sous-groupes d'un groupe libre, notamment ceux d'indice fini ? est-ce que l'intersection de deux sous-groupes finiment engendré l'est encore,. . .) mais aussi de leurs "cousins" que sont les produits libres, produits amalgamés comme le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, etc.

Référence(s) :

— J.-P. Serre ,"Arbres, amalgames, SL2", Astérisque 46 (1977)
— Office hours with a geometric group theorist, Princeton University Press, Princeton, NJ (2017), Editors : Clay, Matt and Margalit, Dan

Responsable : Rémi Coulon

SUJET 5 . **Algèbres de Hopf (co-)commutatives et groupes libres.**

Résumé : Les algèbres de Hopf sont des objets extrêmement riches qu'on rencontre dans de nombreux domaines des mathématiques, tels que la théorie des représentations, la topologie ou la physique mathématique. En plus d'une "multiplication" et d'un élément "unité" (comme pour toutes les algèbres vues en L3), une algèbre de Hopf dispose d'une "comultiplication" et d'une "counité", et toutes ces opérations doivent être compatibles entre-elles et vis-à-vis d'une "antipode" jouant un rôle d'inversion. Les groupes libres, quant à eux, constituent (en théorie des groupes) la version non-commutative des groupes abéliens libres que nous avons étudiés en L3.
Dans ce mémoire, nous commencerons par nous familiariser avec tous ces objets de nature algébrique : leurs définitions, le calcul graphique pour leurs opérations et quelques familles d'exemples. Puis, nous nous concentrerons sur les algèbres de Hopf commutatives (ou, dualement, co-commutatives) et nous tâcherons de comprendre l'énoncé d'un résultat de Pirashvili, qui fut récemment redémontré par Habiro : les groupes libres de type fini (et leurs homomorphismes) "régissent" les opérations qu'on peut effectuer au sein de cette classe particulière d'algèbres de Hopf.

Référence(s) :

(1) C. Kassel, Quantum groups. Graduate Text in Mathematics 155. Springer-Verlag, New York, 1995. (pour la lecture des Chapitres I, II & III)
(2) K. Habiro, On the category of finitely generated free groups. arXiv :1609.06599. (pour feuilleter simplement)
(3) T. Pirashvili, On the PROP corresponding to bialgebras. Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. 43 :3 (2002), 221-239. (pour feuilleter simplement)

Responsable : Gwenael Massuyeau

<u>SUJET 6</u> . **Les statistiques algébriques : un mariage réussi entre l'algèbre et les statistiques.**

Résumé : Les *statistiques algébriques* sont un domaine des mathématiques en plein boom où l'on applique des résultats d'algèbre commutative (qui est la branche des mathématiques qui étudie les anneaux de polynômes et leurs quotients) pour faire des statistiques. Le but de ce mémoire est de proposer une introduction aux statistiques algébriques qui utilisent les *bases de Markov* ; celles-ci sont utilisées en premier lieu pour estimer la qualité d'un ajustement de données empiriques à un modèle statistique donné. Mais il y a bien sûr beaucoup d'autres applications concrètes des bases de Markov à découvrir dans le cadre de ce mémoire pour l'étudiant.e motivé.e qui choisira ce sujet.

Référence(s) :

(1) Mathias Drton, Bernd Sturmfels, Seth Sullivant. "Lectures on Algebraic Statistics" (livre), Springer 2009. (Disponible sur demande au format pdf.)

Responsable : Daniele Faenzi

<u>SUJET 7</u> . **Théorie de Galois différentielle.**

Résumé : La *théorie de Galois différentielle* est une branche des mathématiques qui a pour objet l'étude des équations différentielles via des méthodes algébriques, plus particulièrement des méthodes issues de la théorie de Galois pour les équations algébriques (mais connaître la théorie de Galois n'est pas requis pour faire ce mémoire). Le but de ce mémoire est d'initier l'étudiant.e qui choisira ce sujet à cette théorie à travers la lecture du premier chapitre du livre "Galois theory of linear differential equations".

Référence(s) :

(1) Livre "Galois theory of linear differential equations", Marius Van der Put et Michael Singer. (Disponible sur demande au format pdf.)

Responsable : Daniele Faenzi

<u>SUJET 8</u> . **L'inégalité de corrélation gaussienne**

L'une des inégalités les plus célèbres en probabilité est l'inégalité de corrélation gaussienne :

$$\mathbb{P}(X \in A \cap B) \geq \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(X \in B),$$

où X un vecteur gaussien centré et A, B sont des ensembles convexes symétriques. Cette inégalité conjecturée en 1972 a été très récemment prouvée par Thomas Royen en 2014. L'objectif de ce mémoire est d'étudier la preuve de ce résultat ainsi que les conséquences pratiques de cette inégalité en statistique. L'étudiante ou l'étudiant choisissant ce sujet pourra, au choix, explorer les points suivants :

(1) Démontrer l'inégalité de corrélation gaussienne en dimension 2 (en dimension 1 la preuve est triviale).

(2) Démontrer l'inégalité suivante (qui est un corollaire de l'inégalité de corrélation gaussienne) :

$$\mathbb{P}(|X_1| \leq s_1, \ldots, |X_n| \leq s_n) \geq \mathbb{P}(|X_1| \leq s_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(|X_n| \leq s_n),$$

où $X_1, \ldots, X_n$ sont les composantes du vecteur gaussien X. Illustrer que cette inégalité permet de construire une région de confiance rectangulaire pour l'espérance d'un vecteur gaussien.

(3) Démontrer l'inégalité de corrélation gaussienne.

Référence(s) :

- Barthe, Franck (2018). L'inégalité de corrélation gaussienne, d'après Thomas Royen.
- Pitt, Loren. D (1977). A Gaussian correlation inequality for symmetric convex sets.
- Zbynek Sidak (1967). Rectangular confidence regions for the means of multivariate normal distributions.
- Vidéo d'un séminaire à l'IHP fait par Franck Barthe sur l'inégalité de corrélation gaussienne.
- Article grand public sur Thomas Royen et sa preuve de l'inégalité de corrélation gaussienne.

Responsable : Patrick Tardivel et Yoann Offret

SUJET 9 . **Agrégation limité par diffusion interne**

RÉSUMÉ : Trouvant des motivations dans un article de physique [3], le modèle d'Agrégation Limitée par Diffusion Interne (IDLA) a été introduit dans la sphère mathématique de façon concomitante dans [1] et [2]. Il s'agit d'un modèle de croissance aléatoire qui peut être décrit assez informellement comme suit.
Plaçons nous sur $\mathbf{Z}^d$ et définissons l'agrégat initial A_0 comme étant constitué du singleton 0. Pour $n \in \mathbf{N}$, l'agrégat A_n est construit en lançant une marche aléatoire simple au plus proche voisin sur $\mathbf{Z}^d$ depuis l'origine et en ajoutant à l'agrégat A_{n-1} le premier site visité par la marche en dehors de celui-ci. Les marches utilisées à chaque étape de la construction sont indépendantes les unes des autres. Une question naturelle est la description de la forme asymptotique (après éventuelle renormalisation) de A_n lorsque n tend vers l'infini. Une première réponse se trouve dans [2] dont la compréhension est l'objectif principal de ce mémoire.
Outre les références ci-dessous, on pourra consulter et travailler, en première approche le texte de modélisation disponible à partir de l'URL suivante : `https://perso.univ-rennes1.fr/ismael.bailleul/AGREG/TEXTES/ald.pdf`. L'étude d'articles raffinant le Théorème de forme asymptotique de [1] est un prolongement possible.

RÉFÉRENCE(S) :

[1] P. DIACONIS et W. FULTON, *A growth model, a game, an algebra, Lagrange inversion, and characteristic classes.*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 49(1) :95–119. Commutative algebra and algebraic geometry, II (Italian), 1990.
[2] G. LAWLER, M. BRAMSON et D. GRIFFEATH, *Internal Diffusion Limited Aggregation*, Ann. Prob., 20(4) :2117–2140, 1992.
[3] P. MEAKIN et J.M. DEUTCH, *The formation of surfaces by diffusion-limited annihilation*, J. Chem. Phys., 85(4), 1986.

RESPONSABLE : Arnaud Rousselle

SUJET 10 . **Introduction à la théorie des valeurs extrêmes**

Étant donnée une suite de variables aléatoires réelles $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$, la Théorie des Valeurs Extrêmes (EVT) vise à l'étude du comportement (asymptotique) de $M_n = \max_{1\le k\le n} X_k$ et $m_n = \min_{1\le k\le n} X_k$ ou plus généralement aux statistiques d'ordre, dans un premier temps en supposant les X_k indépendantes puis en cherchant à relâcher cette hypothèse. Ce mémoire se veut être une introduction à cette théorie.
On pourra, par exemple, s'intéresser au Théorème de Fisher–Tippett–Gnedenko, montrant que si les X_k sont i.i.d. et s'il existe des suites de constantes de normalisation $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telles que $b_n^{-1}(M_n - a_n)$ converge vers une v.a. non dégénérée celle-ci suit nécessairement une des lois max-stables (Fréchet, Gumbel ou Weibull), aux méthodes d'étude de M_n *via* le processus ponctuel des excédants ou encore à l'approche Peak-Over-the-Threshold (POT).

RÉFÉRENCE(S) :

[1] P. EMBRECHTS, C. KLÜPPELBERG et T. MIKOSCH, *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*, Stochastic Modelling and Applied Probability, 33, Springer Science & Business Media, 2013.

RESPONSABLE : Arnaud Rousselle

SUJET 11 . **Caractéristiques géométriques des cellules de la mosaïque de Poisson-Voronoï**

RÉSUMÉ : Étant donné un ensemble de points localement fini $\xi \in \mathbf{R}^d$, la *mosaïque de Voronoï* associée à cet ensemble est la collection de cellules :
$$\mathrm{Vor}_\xi(\mathbf{x}) = \left\{x \in \mathbf{R}^d : \|x - \mathbf{x}\| \le \|x - \mathbf{x}'\|, \forall \mathbf{x}' \in \xi\right\}, \qquad \mathbf{x} \in \xi.$$
La cellule $\mathrm{Vor}_\xi(\mathrm{x})$ est appelée *cellule de Voronoï* de germe $\mathbf{x}$ dans ξ. Cette mosaïque fournit un découpage de $\mathbf{R}^d$ en des polygones convexes naturel pour des modèles dans lesquels une compétition pour les ressources intervient.
Lorsque ξ est une réalisation (aléatoire) d'un processus ponctuel de Poisson (PPP) dans $\mathbf{R}^d$, on parle de *mosaïque de Poisson-Voronoï*. Si un point est ajouté à ξ en 0, la cellule contenant l'origine est, en un certain sens, typique.
Dans ce mémoire, on s'intéressera aux distributions de caractéristiques géométriques (nombre d'hyperfaces ou de sommets, volume, ...) de la cellule typique de la mosaïque de Poisson-Voronoï. Pour cela, on étudiera l'article [1] et on illustrera les résultats par des simulations numériques. Les preuves de [1] reposent sur le développement d'une formule de Russo pour les PPP (détaillée dans ce même article). Une introduction à la théorie des processus ponctuels pourra être trouvée, par exemple, dans [2].

RÉFÉRENCE(S) :

[1] S. ZUYEV, *Estimates for distributions of the Voronoï polygon's geometric characteristics*, Random Structures & Algorithms, Vol. 3, n° 2, p. 149-162, 1992.
[2] R.SCHNEIDER et W. WEIL, *Stochastic and integral geometry*, Probability and its applications, Springer, 2008.

RESPONSABLE : Arnaud Rousselle

<u>SUJET 12</u> . **Sommation de séries divergentes**

RÉSUMÉ : Le cours d'analyse de Licence a permis de donner une théorie cohérente des séries numériques. En particulier on a donné une définition de la convergence, aussi appelée sommabilité, de telles séries : une série converge quand la suite de ses sommes partielles converge. On a aussi donné des conditions nécessaires ou suffisantes pour la convergence de ces séries (par exemple, une condition nécessaire de convergence est que le terme général de la série tende vers 0).
La tentation est grande d'essayer de définir malgré tout la somme de séries divergentes. Par exemple, on a très envie de dire

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}.$$

Tel quel, cet énoncé n'a aucun sens (que signifie le membre de gauche ?) Pourtant, de très grands noms comme Euler, Abel, Hölder ou Poincaré se sont intéressés à de telles sommations. Récemment, des séquences vidéos réalisées par des vidéastes enthousiastes, plus ou moins compétents et plus ou moins honnêtes, ont connu des succès considérables en rassemblant couramment plusieurs millions de téléchargements. On prétend y montrer, par quelques tours de passe-passe à forte odeur de soufre, que

$$1+2+3+\cdots=-\frac{1}{12}.$$

Aussi étonnant que cela puisse paraître, tout n'est pas absurde dans ces développements. Mais tout n'est pas correct non plus. Ce sujet vise à préparer de futurs enseignants à répondre aux questions que poseront leurs élèves exposés à de tels discours.
L'essentiel du travail consistera à lire les premiers chapitres du livre *Divergent Series*, de G.H. Hardy, et d'en réaliser une synthèse lisible par un étudiant de niveau L. Les principaux outils utilisés relèveront de l'analyse élémentaire dans $\mathbf{R}$ et de l'algèbre linéaire dans l'espace des suites réelles.
Suivant les goûts des étudiants et l'état d'avancement du mémoire, on pourra ensuite s'intéresser aux méthodes de sommation par prolongement analytique (et notamment la fonction ζ de Riemann).

RÉFÉRENCE(S) : G. H. Hardy (1949), Divergent Series, Oxford : Clarendon Press. Disponible à la bibliothèque de l'IMB.

RESPONSABLE : Thomas Chambrion

<u>SUJET 13</u> . **Constructions à la règle et au compas.**

RÉSUMÉ : Étant donnés deux points du plan à distance 1, quels sont les points du plan qui peuvent être construit à la règle et au compas ? La théorie de Galois permet de répondre complètement à cette question, c'est le théorème de Gauss-Wantzel qui caractérise complètement les points du plan constructibles. En particulier, les problèmes classiques de trisection de l'angle et de quadrature du cercle n'ont pas de solution.
Que se passe-t-il si on autorise uniquement l'usage du compas ? Un théorème surprenant, dû à Mohr et Mascheroni, dit que toute construction possible à la règle et au compas est en fait réalisable avec le compas seulement !
L'objet principal du mémoire sera d'expliquer les théorèmes de Gauss-Wantzel et de Mohr-Mascheroni.

RÉFÉRENCE(S) :

(1) JEAN-CLAUDE CARREGA *Théorie des corps. La règle et le compas*, Collection Formation des enseignants
(2) DANIEL PERRIN *Cours d'algèbre*, Chapitre III.2, Ellipses
(3) ALEXANDRE BALLEUIL *Nombres transcendants*, Partie II, https ://abailleul.perso.math.cnrs.fr/Transcendants.pdf

RESPONSABLE : Renaud Detcherry