

Université de Bourgogne

Master en mathématiques Appliquées (MIGS) 1ère année - Programme

Master in Applied Mathematics (MIGS) 1st year - Program

Langue : Français

Responsable : Xavier Dupuis (xavier.dupuis@u-bourgogne.fr)

Language: French

Coordinator: Xavier Dupuis (xavier.dupuis@u-bourgogne.fr)

Objectifs

Aims

L'objectif est de former des cadres de profil « ingénieur mathématicien » présentant une double compétence en modélisation mathématique et en informatique scientifique immédiatement valorisable au sein d'une entreprise. La formation est axée sur trois domaines d'applications qui sont actuellement en fort développement dans l'industrie et le secteur tertiaire : la modélisation statistique et l'analyse des données, le calcul scientifique (EDP numériques) et l'optimisation. La statistique, le calcul scientifique, l'optimisation et l'algorithmique sont au cœur de l'enseignement de ce master.

The objective is to train executives with a "mathematical engineer" profile who have a dual competence in mathematical modeling and scientific computing that can be immediately applied in a company. The training focuses on three fields of application that are currently undergoing a strong development in the industry and the service sector: statistical modeling and data analysis, scientific computing (numerical PDE) and optimization. Statistics, scientific computing, optimization and algorithmic are at the heart of the teaching of this master.

Cours du semestre 1 (septembre - janvier)

Courses of Semester 1 (September - January)

MIGS1-1, Optimisation 1 (Cours obligatoire - 6 ECTS)

MIGS1-1, Optimization 1 (Compulsory course - 6 ECTS)

Il s'agit d'un cours d'introduction à l'optimisation continue, différentiable, non linéaire, ainsi qu'aux méthodes numériques pour résoudre de tels problèmes d'optimisation. Un premier chapitre est consacré à la définition d'un problème d'optimisation, aux conditions suffisantes d'existence d'une solution et à celles garantissant son unicité (ces dernières étant liées à la notion de convexité, fondamentale en optimisation). Des prérequis en topologie et en calcul différentiel sont nécessaires. Les chapitres suivants traitent, pour l'optimisation sans contrainte puis pour l'optimisation avec contraintes, des conditions d'optimalité satisfaites par une solution (conditions de Fermat, de Lagrange ou de KKT) et des algorithmes de résolution numérique des problèmes (algorithmes à directions de descente, de gradient, de Newton ou

quasi-Newton, de gradient projeté, de dualité, ...). Des TP sont réalisés en Python.

This course is an introduction to continuous, differentiable, nonlinear optimization, as well as to numerical methods for solving such optimization problems. A first chapter is devoted to the definition of an optimization problem, to sufficient conditions for the existence of a solution, and to those assuring its uniqueness (the latter being related to the notion of convexity, fundamental in optimization). Prerequisites in topology and differential calculus are necessary. The next chapters deal, for unconstrained and constrained optimization, with optimality conditions satisfied by a solution (Fermat, Lagrange, or KKT conditions) and with algorithms to solve numerically the problems (descent, gradient, Newton or quasi-Newton, gradient projection, duality, ..., methods). Practice in Python.

MIGS1-2, Probabilités (Cours obligatoire - 6 ECTS)

MIGS1-2, Probability (Compulsory course - 6 ECTS)

La première moitié du cours de Probabilité concerne la caractérisation des lois de probabilité et la caractérisation de la convergence en loi. On traitera notamment les caractérisations par la fonction de répartition, la fonction caractéristique ou plus généralement diverses caractérisations fonctionnelles. On illustrera ces résultats en démontrant le théorème de Lévy que l'on appliquera pour démontrer le théorème central limite. Ceci sera également l'occasion d'aborder la notion de vecteurs Gaussiens. La seconde moitié du cours porte sur la notion fondamentale d'espérance et de lois conditionnelles, notions élémentaires dans le cadre discret qui s'avèrent bien plus théoriques dans le cadre général. Ces deux notions sont des prérequis essentiels pour introduire les notions de martingales et de chaînes de Markov du cours d'Algorithmes Stochastiques au second semestre.

To begin with, the Probability lesson deals with the characterization of probability distributions and their convergence. For instance with the distribution function, the characteristic function or more generally with various other functional characterizations. We will illustrate these results by demonstrating Lévy's theorem and the central limit theorem. This will be the opportunity to study Gaussian vectors. The second half of the course deals with the fundamental notions of conditional expectation and transition kernels. Those are elementary in the discrete framework which turn out to be much more theoretical in the general one. These two notions are essential prerequisites to introduce the notions of martingales and Markov chains of the Stochastic Algorithms course in the second semester.

MIGS1-3, Algorithmique et programmation (Cours obligatoire - 6 ECTS)

MIGS1-3, Algorithmic and Programming (Compulsory course - 6 ECTS)

Cette UE est une introduction aux structures de données et aux algorithmes pour les étudiants en mathématiques. Elle comprend à la fois une partie théorique dédiée à leur conception et leur analyse, et une partie appliquée consacrée à leur mise en oeuvre à travers l'apprentissage d'un langage de programmation.

This course is an introduction to data structures and algorithms for students in mathematics. It includes both a theoretical part on their design and analysis and a practical part devoted to their implementation through the learning of a programming language.

MIGS1-4, Analyse des données (Cours obligatoire - 6 ECTS)

MIGS1-4, Data Analysis (Compulsory course - 6 ECTS)

Ce cours présente les outils classiques de statistique pour l'analyse des données multidimensionnelles : point de vue géométrique sur la régression linéaire simple et multiple, réduction de la dimension et analyse en composantes principales, analyse discriminante géométrique et décisionnelle, classification non supervisée : algorithme des k-means et algorithme de Ward. TP sous R et Rmarkdown.

This lecture presents classical statistical tools for the analysis of multidimensional data : geometric point of view on simple and multiple linear regression, dimension reduction and principal components analysis, discriminant analysis with geometric and probabilistic point of view, clustering with k-means and Ward's algorithm. Practice with R and Rmarkdown.

MIGS1-5a, Anglais (Cours obligatoire - 3 ECTS)

MIGS1-5a, English (Compulsory course - 3 ECTS)

L'objectif de ce cours est d'approfondir l'ensemble des compétences d'expression et de compréhension écrites et orales en anglais de spécialité. Ce travail s'inscrit dans la continuité de celui effectué en L3 Mathématiques et qui se poursuivra en M2, avec un accent mis sur l'écrit en M1 et sur l'oral en M2. Les étudiants apprennent à maîtriser le langage propre aux mathématiques (lexique, éléments de phonologie, lecture de formules et de graphiques simples...) Y sont traités des sujets ayant trait aux mathématiques à travers des supports variés, récents et authentiques.

The objective of this course is to improve all of the skills of written and oral expression and comprehension in specialized English. This work is a continuation of the work done in L3 Mathematics and will continue in M2, with an emphasis on the written skills in M1 and the oral ones in M2. Students learn to master the language of mathematics (lexicon, phonology, reading simple formulas and graphs, etc.). Mathematical topics are covered through a variety of recent and authentic materials (press articles, videos...).

MIGS1-5b, Projet personnel (Cours obligatoire - 3 ECTS)

MIGS1-5b, Personal Project (Compulsory course - 3 ECTS)

Cours du semestre 2 (janvier - mai)

Courses of Semester 2 (January - May)

MIGS2-1, Algorithmes stochastiques (Cours obligatoire - 6 ECTS)

MIGS2-1, Stochastic Algorithms (Compulsory course - 6 ECTS)

Les variables aléatoires ne suffisent pas toujours pour décrire une situation dépendant du hasard. Parfois, il faut pouvoir décrire l'évolution de la situation au cours du temps et alors utiliser des suites de variables aléatoires appelées aussi processus stochastiques à temps discret (martingales ou chaînes de Markov). L'objet du cours est de combiner une exploration théorique des processus stochastiques à une approche algorithmique mise en oeuvre sur des applications concrètes (utilisation de python). Au programme : Génération de nombres aléatoires, méthodes de Monte-Carlo pour l'intégration, étude des

martingales (théorème d'arrêt et théorèmes limites) et des chaînes de Markov (classification des états et théorèmes ergodiques).

Random variables or random vectors are crucial in the study of applied mathematical models. However it is sometimes important to understand how the situation evolves over time: time-discrete stochastic processes are therefore introduced (martingales or Markov chains). The aim of this course is to combine a theoretical approach of stochastic processes and an algorithmic approach in connection with applications (use of the python language). Content: Random variable generation, Monte Carlo integration, study of martingales (Stopping and convergence theorems) and Markov chains (recurrence, transience, ergodic theorems).

MIGS2-2, Statistique inférentielle (Cours obligatoire - 6 ECTS) **MIGS2-2, Statistical Inference (Compulsory course - 6 ECTS)**

Ce cours présente les outils de base pour l'inférence statistique. Modèles statistiques et estimateurs : définition, biais et risque quadratique. Méthode des moments et estimateurs du maximum de vraisemblance, information de Fisher et borne de Cramer-Rao. Estimation par intervalles, tests d'hypothèses (rapport de vraisemblance, les tests du khi-2). Estimation et inférence dans le modèle linéaire Gaussien. TP sous R.

This lecture presents the basic tools for statistical inference. Statistical models and estimators : definition, bias and quadratic risk. The method of moments and maximum likelihood estimators. Fisher information and Cramer-Rao bound. Confidence intervals, hypothesis testing (likelihood ratio tests, khi-2 tests). Estimation and inference in the Gaussian linear regression model. Practice with R.

MIGS2-3, Calcul scientifique 1 (Cours obligatoire - 6 ECTS) **MIGS2-3, Scientific Computing 1 (Compulsory course - 6 ECTS)**

Le cours Calcul Scientifique 1 donne une introduction aux méthodes numériques pour les équations différentielles ordinaires (EDO). En partant de l'interpolation polynomiale, les différences finies sont introduites pour approcher les dérivées. L'ordre d'une méthode numérique est discutée ainsi que le concept de stabilité. Ceci est appliqué aux EDO linéaires et non linéaires, ainsi qu'aux EDO singulières. Pour une application efficace des méthodes numériques les aspects nécessaires de la théorie des EDO sont discutés.

The course Scientific Computing I gives an introduction to numerical methods for ordinary differential equations (ODEs). Finite differences to approximate derivatives are introduced via polynomial interpolation. The order of a method is discussed as well as concepts of numerical stability. These are applied to linear and nonlinear ODEs, also to singular ODEs. In order to allow for efficient numerical approaches, theoretical aspects of ODEs are discussed.

MIGS2-4, Analyse numérique (Cours obligatoire - 6 ECTS) **MIGS2-4, Numerical Analysis (Compulsory course - 6 ECTS)**

Ce cours est un approfondissement sur les méthodes numériques pour l'algèbre linéaire, qui sont utiles à une large classe de problèmes pour la modélisation, le calcul scientifique, l'optimisation et la statistique. La

première partie concerne la résolution efficace de systèmes linéaires creux et de grande dimension, qu'on rencontre par exemple dans le domaine de la simulation numérique. On y étudie les techniques itératives basées sur les espaces de Krylov, qui sont à la base de la plupart des codes de calcul modernes. L'algorithme du gradient conjugué, pour les matrices symétriques, y fait l'objet d'une attention particulière, mais ce sont des techniques qu'on retrouve aussi dans d'autres méthodes (GMRES par exemple, pour les systèmes avec matrices non symétriques). La deuxième partie concerne la résolution de systèmes linéaires mal posés avec la méthode des moindres carrés. En effet, dans de nombreuses applications industrielles, ou en analyse de données, on se retrouve fréquemment dans la situation où on devrait résoudre un système linéaire qui n'a pas de solutions, ou en a trop. On étudie en détails le formalisme des moindres carrés, et sa résolution dans le cas général qui fait appel à la décomposition en valeurs singulières. On y voit aussi des techniques diverses de résolution pratique, en particulier celle qui se base sur une décomposition QR par la méthode de Householder, et qui est à la base de nombreux logiciels de calcul scientifique (Matlab par exemple).

This is an advanced course of numerical linear algebra, that presents methods useful for many applied problems in modelling, computational engineering, numerical optimization and data science. The first part is about efficient solving of sparse linear systems of huge dimension, that can be found, for instance, in numerical simulation. Krylov-based iterative techniques are studied, since they are at the very core of modern software. The conjugate gradient, for symmetric matrices, is object of detailed attention, but similar techniques exist also for other methods (GMRES for instance, for non-symmetric matrices). A second part deals with ill-posed linear systems and the least square formalism. In many industrial applications, or in data science, it is common to find oneself with a linear system that has no solution, or a lot of solutions, and one need to do something in such situations. We study in depth the least square technique, from the theoretical viewpoint first, and using the singular value decomposition. Then we review various techniques for practical solving, with particular emphasis on the QR decomposition through the Householder method, which is implemented commonly in many scientific software (Matlab for instance).

MIGS2-5, Projet personnel (Cours obligatoire - 6 ECTS) **MIGS2-5, Personal Project (Compulsory course - 6 ECTS)**

L'UE Projet personnel du 2nd semestre consiste en des projets Math-Info, où les étudiants travaillent de façon autonome, par binômes, sur un sujet proposé par un membre de l'Institut de Mathématiques de Bourgogne, rédigent un rapport et produisent du code (Python, R, C++, Scilab, etc.), présentent leur travail lors d'une soutenance.

The teaching unit Personal project of the 2nd semester consists in mathematics and computing projects, where students work independently, in pairs, on a subject proposed by a member of the Institut de Mathématiques de Bourgogne, write a report and produce code (Python, R, C++, Scilab, etc.), and present their work during a defense.